
스트라디바리 아치의 재현

Hwang, Il-Seok*

* H.I.S. Violin Atelier / www.hisviolins.com / hisviolins@gmail.com



December 8, 2025

많은 제작가가 스트라디바리 아치를 재현하려 하지만, 아직 그 원리가 밝혀지지 않아 모방에 의존하고 있습니다. 본 보고서는 트로코이드 곡선을 이용해 스트라디바리 아치를 재현하는 방법을 설명합니다. 더 나아가, 실제 악기 제작 시 아치의 폭과 높이에 상관없이 스트라디바리 아치를 구현하는 방법도 함께 알아봅니다.

스 트라디바리의 아치와 가장 유사한 곡선은 커테이트 트로코이드(Curtate Trochoid, CTD)¹라고 알려져 있습니다. 그러나 스트라디바리 아치의 모습은 매우 다양하며, 대부분 CTD보다 더 풍만한 모양을 하고 있습니다. 이 때문에 아치를 재현하는 데 CTD를 사용하기는 어렵습니다. 따라서 본 보고서는 CTD 곡선이 가진 문제점을 해결하고 스트라디바리 아치를 충실히 재현하는 방법을 기술하고자 합니다. 이를 위해 다음과 같은 순서로 내용을 전개하겠습니다.

본격적인 설명에 앞서 한 가지 용어를 정리하겠습니다. 이 보고서는 ‘아치가 부풀어 오른 정도’에 대한 연구로, 이는 일반적으로 아치 볼륨이라 불립니다. 그러나 볼륨(volume)은 3차원의 부피를 의미하는 단어입니다. 본 보고서는 2차원 평면의 아치만을 다루므로 볼륨이라는 표현은 적절하지 않습니다. 따라서 2차원 평면에서 아치가 부풀어 오른 정도를 나타내는 용어로 ‘충만도(fullness)’를 사용하고 있습니다. 자세한 설명은 Chapter 8.2.3을 참고하시기 바랍니다.

첫 번째, 재현할 스트라디바리 아치가 무엇인지 정의해야 합니다. 이를 위해 재현 대상이 될 기준 모델을 설정합니다. 가장 합리적인 방법은 현존하는 모든 스트라디바리 아치의 평균값을 모델로 삼는 것이지만, 이는 현실적으로 불가능합니다. 따라서 이 보고서에서는 잘 알려진 서적과 포스터의 데이터를 모델로 사용합니다.

두 번째, CTD 곡선이 가진 문제점을 알아봅니다. 먼저 트로코이드(Trochoid, TD) 곡선의 정의, 종류, 특성을 설명합니다. 그다음, 앞에서 정의한 모델을 원호 및 CTD 곡선과 비교하여 CTD가 스트라디바리 아치와 어떻게 다른지, 또 스트라디바리 아치가 얼마나 다양한 형태를 갖는지 파악합니다.

¹ 일부 자료에서는 ‘커테이트 사이클로이드(Curtate cycloid)’라고 표현하고 있습니다.

세 번째, TD의 한 종류인 하이포트로코이드(Hypotrochoid, HTD)와 에피트로코이드(Epitrochoid, ETD) 곡선을 이용해 1~5번 아치를 재현하는 방법을 설명합니다.

네 번째, 앞서 설명한 두 TD 곡선의 한계를 알아봅니다. 그리고 이 한계로 인해 재현이 불가능할 경우, 근사 곡선을 이용해 해결하는 방법을 설명합니다.

다섯번째, 6번 아치는 다른 아치들과는 모양이 다르므로 재현 방법 또한 다를 수 밖에 없습니다. 근사 곡선의 작성 원리를 이용하여 6번 아치를 작성하는 방법을 설명합니다.

여섯 번째, 위 방법들을 사용해 4가지 모델의 아치를 재현합니다. 이후 비교 이미지, 파라미터, 충만도, 오차 등을 분석하여 스트라디바리 아치의 특징을 파악하고, 재현 방법의 신뢰도를 평가합니다.

마지막으로, 이 재현법을 실제 악기 제작에 적용하는 방법을 알아봅니다.

부록에서는, 등고선의 패턴 분석에 대하여 설명하고, 모델 제작 당시의 아치 모습과 제작자의 의도를 추정해봅니다.

참고로, 본문에서 특별한 표시가 없는 모든 숫자의 단위는 밀리미터(*mm*)입니다.

1 아치의 정의

콜로세움의 아치, 교각의 아치, 그리고 현악기의 아치 등, 우리가 일반적으로 부르는 ‘아치’는 매우 다양한 모습을 가지고 있습니다. 따라서 이 보고서에서 다루는 아치가 무엇이며, 어떤 조건을 만족해야 하는지 먼저 정의하겠습니다.

1.1 아치의 조건

본서에서 말하는 아치란 다음의 조건을 만족하는 아치를 의미합니다.

Condition 1.1. 아치의 조건

- 정점과 양쪽 끝점에서 접선의 기울기는 0이어야 한다.
- 곡선은 단조롭게 증가하거나 감소해야 한다.
- 정점을 기준으로 좌우 대칭이어야 한다.

‘접선의 기울기’란 Figure 1의 붉은 실선처럼 특정 지점에서 곡선에 접하는 직선의 기울기를 말합니다. 그림의 Curve A는 정점과 양 끝점에서 접선의 기울기가 0(수평)이지만, Curve B는 끝점의 기울기가 0이 아닙니다. 접선의 기울기가 0이라는 것은 해당 지점이 아치에서 가장 높은 곳(정점)이거나 가장 낮은 곳(끝점)임을 의미합니다. Curve B처럼 끝점의 기울기가 0이 아니면 그 지점은 아치의 최저점이 아니므로 끝점이 될 수 없습니다. 따라서 본 보고서에서는 Curve B와 같은 곡선은 아치로 정의하지 않습니다.

또한 아치는 한쪽 끝점에서 정점까지 높이가 계속 증가해야 합니다(단조증가). 이 구간에 높이가 변하지 않는 수평 구간이 있거나, 반대로 높이가 감소하는 구간이 있다면 아치라고 할 수 없습니다. 참고로 Condition 1.1.c 는, 재현 대상 모델에는 적용하지 않습니다.

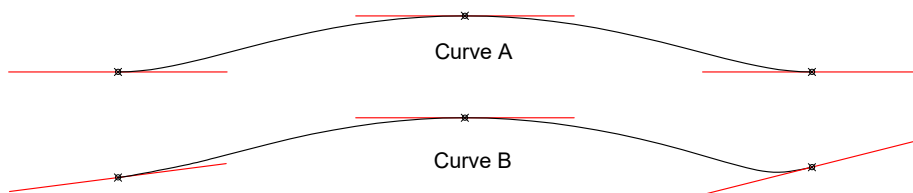


Figure 1: Tangent slopes at the apex and endpoints of an arch

1.2 아치의 위치

6개 아치의 위치는 Figure 2, Table 1과 같이 정의합니다. 아치 최저점에서 최고점까지가 재현 대상이며, 6번 아치는 정점을 기준으로 상단부와 하단부로 구분합니다. 단, 모델D의 4번 아치는 하단 코너부가 아니라 F홀 바로 아래에 위치합니다.²

²CT Scan 시 F홀 에 의해 아치가 끊어지는 것을 방지하기 위한 것으로 추측

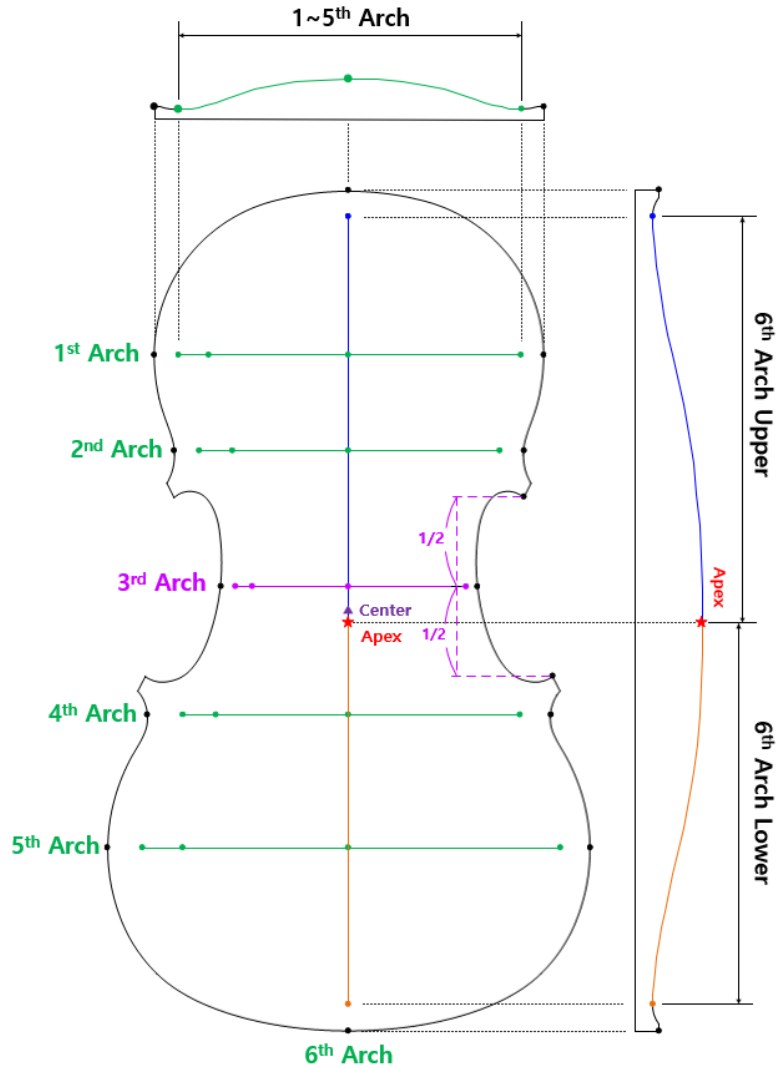


Figure 2: Definition of the 6 arches

Arch	Description
1st Arch	어퍼 바우트(Upper bout)의 가장 넓은 곳을 횡 방향으로 가로지르는 아치
2nd Arch	상단 코너의 가장 오목한 지점을 횡 방향으로 가로지르는 아치
3rd Arch	상하단 코너의 중간 지점을 횡 방향으로 가로지르는 아치
4th Arch	하단 코너의 가장 오목한 지점을 횡 방향으로 가로지르는 아치
5th Arch	로어 바우트(Lower bout)의 가장 넓은 곳을 횡 방향으로 가로지르는 아치
6th Arch Upper	플레이트 중심을 세로 방향으로 가로지르는 아치 중에서 아치 정점 기준 상단부의 아치
6th Arch Lower	플레이트 중심을 세로 방향으로 가로지르는 아치 중에서 아치 정점 기준 하단부의 아치

Table 1: Definition of the 6 arches

2 재현 대상 모델

재현에는 총 4종의 악기(모델 A, B, C, D)를 모델로 사용합니다. 바이올린 두 대(A, D), 비올라 한 대(B), 첼로 한 대(C)입니다. 아치를 재현하려면 정확한 제원이 필요하므로, 각 모델의 수치를 추출하기 위한 모델링을 진행합니다. 이때 자료에 있는 그림과 수치를 최대한 활용하고, 부족한 정보는 그림에서 직접 추출합니다. 한 가지 주의할 점은 플레이트의 뒤틀림 때문에 좌우 아치의 모양이 다르다는 것입니다.

2.1 모델 A, B, C

모델 A, B, C는 Simone F. Sacconi의 저서 『The Secrets of Stradivari』(63~83쪽)에 소개된 바이올린, 비올라, 첼로입니다. 이 자료에는 등고선을 비롯한 상세한 데이터가 그림과 수치로 제시되어 있어, 재현 대상으로 삼기에 매우 훌륭합니다.

단, 그의 저서에는 이 세 가지 모델이 실제 어떤 악기의 데이터인지 명시되어 있지 않습니다. 하지만 저서의 내용과 다른 연구가들의 분석을 종합해 보면, 모델 A는 메시아(Messiah, 1716) 또는 벅츠(Betts, 1704)를, 모델 B는 토스카나-메디치(Tuscan-Medici, 1690)를, 그리고 모델 C는 고어-부스(Gore-Booth, 1710) 또는 피아티(Piatti, 1720)를 기본으로 삼고, 여기에 다른 악기들의 평균적인 특징을 함께 반영했을 것으로 추정하고 있습니다.

모델링 방법과 순서는 다음과 같습니다.

1. 자료³의 전체 등고선 이미지를 스캔하고, 플레이트의 세로 길이를 기준으로 축척을 맞춥니다.
2. 축척을 맞춘 이미지에서 각 아치가 위치한 지점(플레이트 상단 끝점에서 각 아치까지의 거리)의 플레이트 폭을 구합니다.
3. 측정된 폭과 동일하도록 상세 아치 이미지의 축척을 다시 맞춥니다.
4. 상세 아치 이미지에서 등고선의 위치와 높이에 맞춰 세로선을 긋습니다.
5. 세로선의 끝점들을 스플라인 곡선으로 연결합니다. 이때 스플라인은 아치의 정점과 양 끝점에서 접선 기울기가 0이 되도록 설정합니다.

Figure 3~8는 위 방법으로 모델링한 3종 모델의 아치입니다. 붉은 선은 재현 대상 아치를, 아치 위 숫자는 각 지점의 높이를 나타냅니다.

이 세 악기를 모델링하는 과정에서 가장 큰 어려움은 자료에 제시된 수치 데이터와 그림이 서로 일치하지 않는다는 점입니다. 자료의 수치 데이터(각 지점의 높이)를 그대로 따르면 표면이 울퉁불퉁한 곡선이 만들어집니다. 반면 그림의 곡선을 따라 선을 추출하면 부드러운 아치를 얻을 수 있지만, 각 지점의 높이가 데이터 값과 완전히 달라집니다. 특히 후자의 방법은 더 큰 문제를 야기합니다. 이 방법으로 완성된 아치들을 조합해 전체 등고선을 그렸을 때 원본 자료의 등고선과 전혀 다른 모습이 되기 때문입니다. 따라서 본 보고서는 수치 데이터를 우선하는 전자의 방법을 택할 수밖에 없었습니다.

³SIMONE F. SACCONI, The Secrets of Stradivari, p.63~p.83

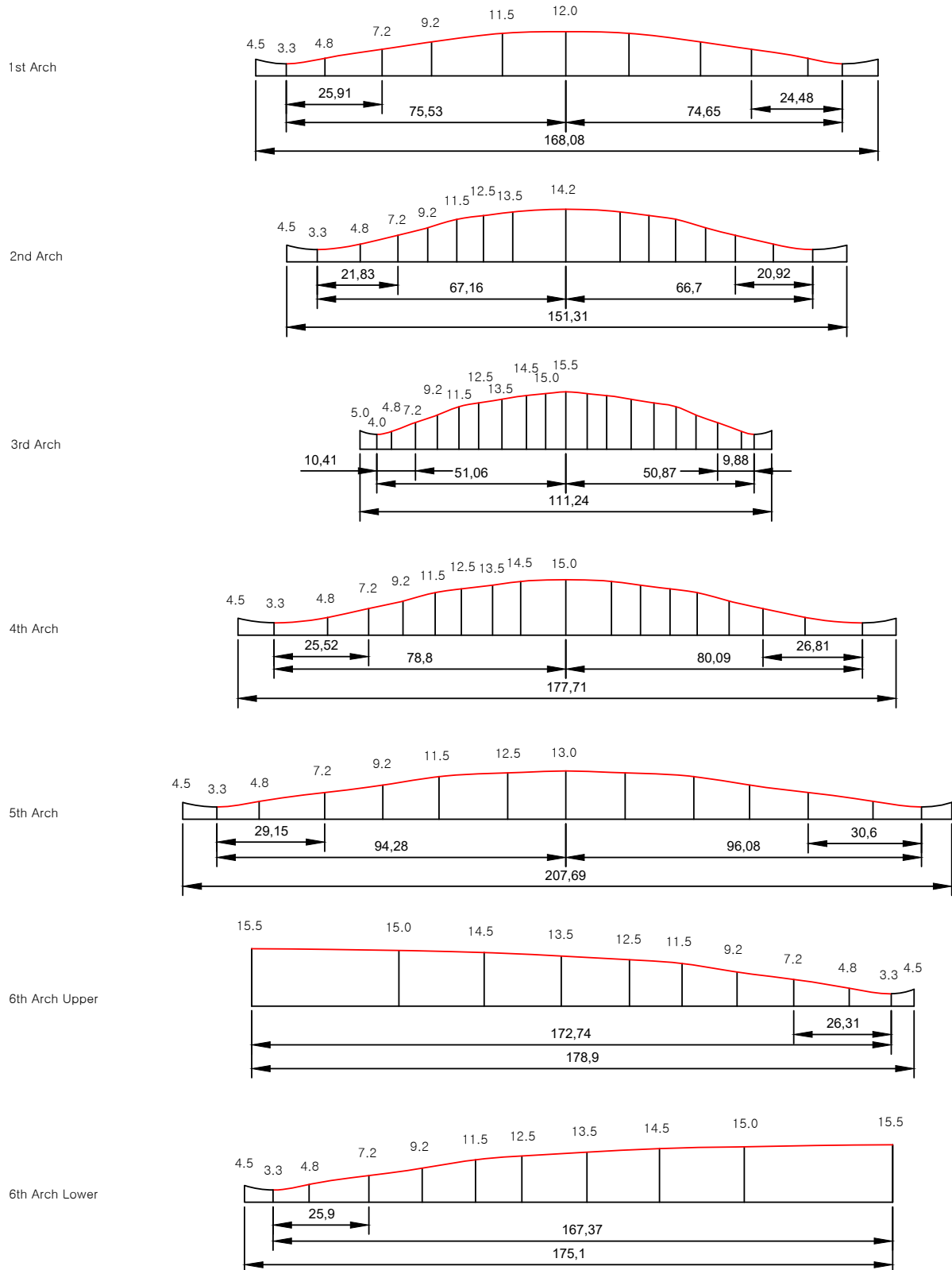


Figure 3: Model A, Violin Front

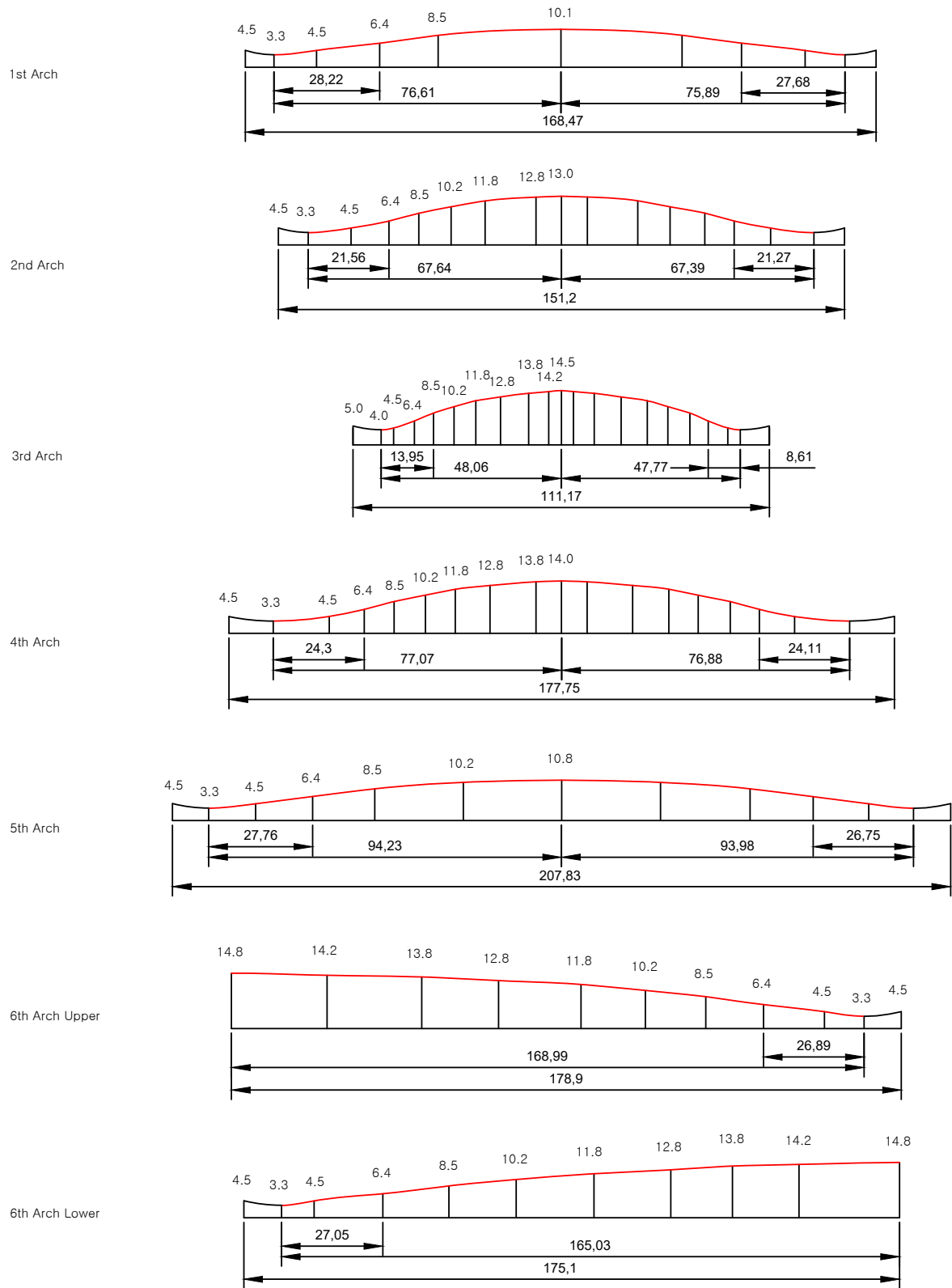


Figure 4: Model A, Violin Back

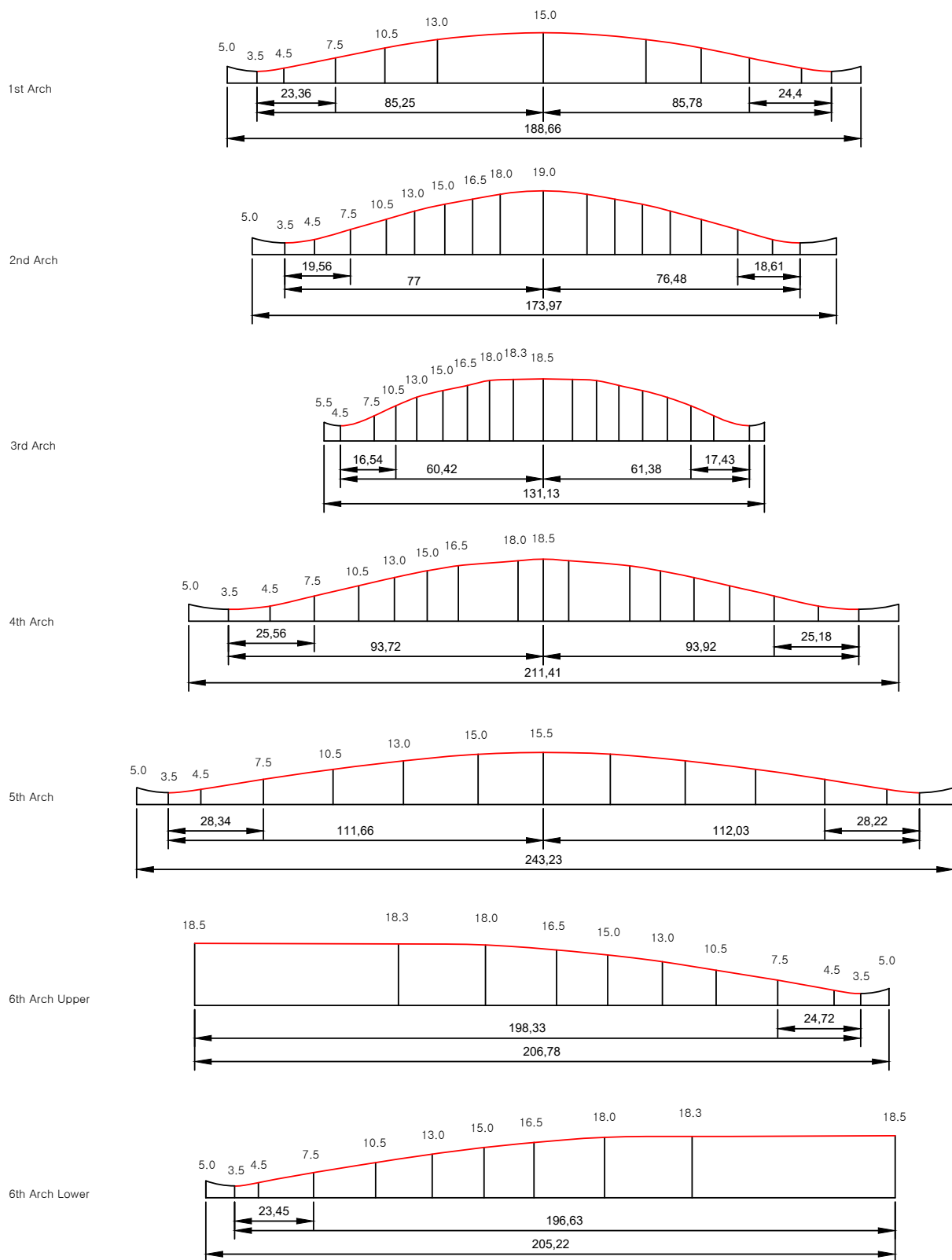


Figure 5: Model B, Viola Front

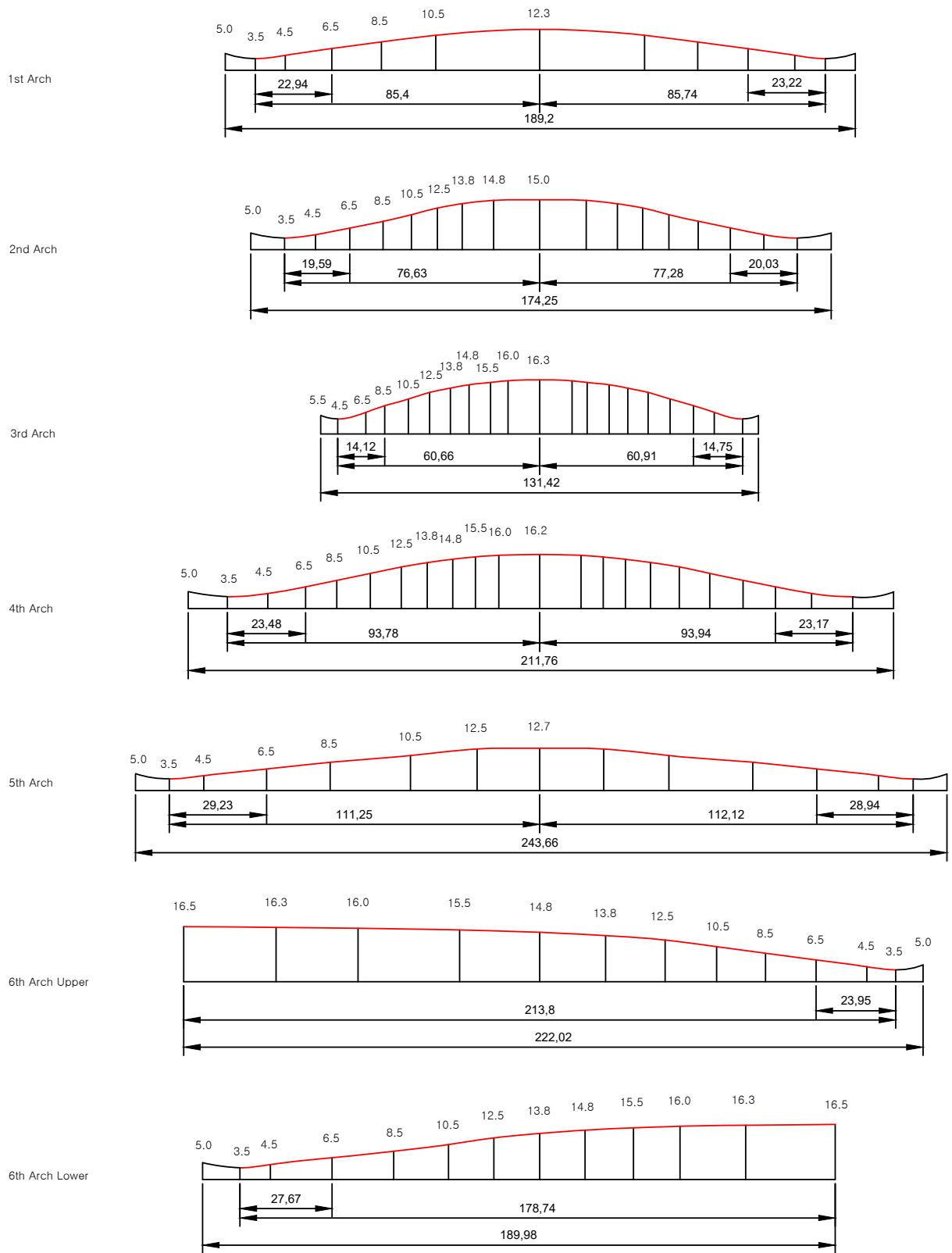


Figure 6: Model B, Viola Back

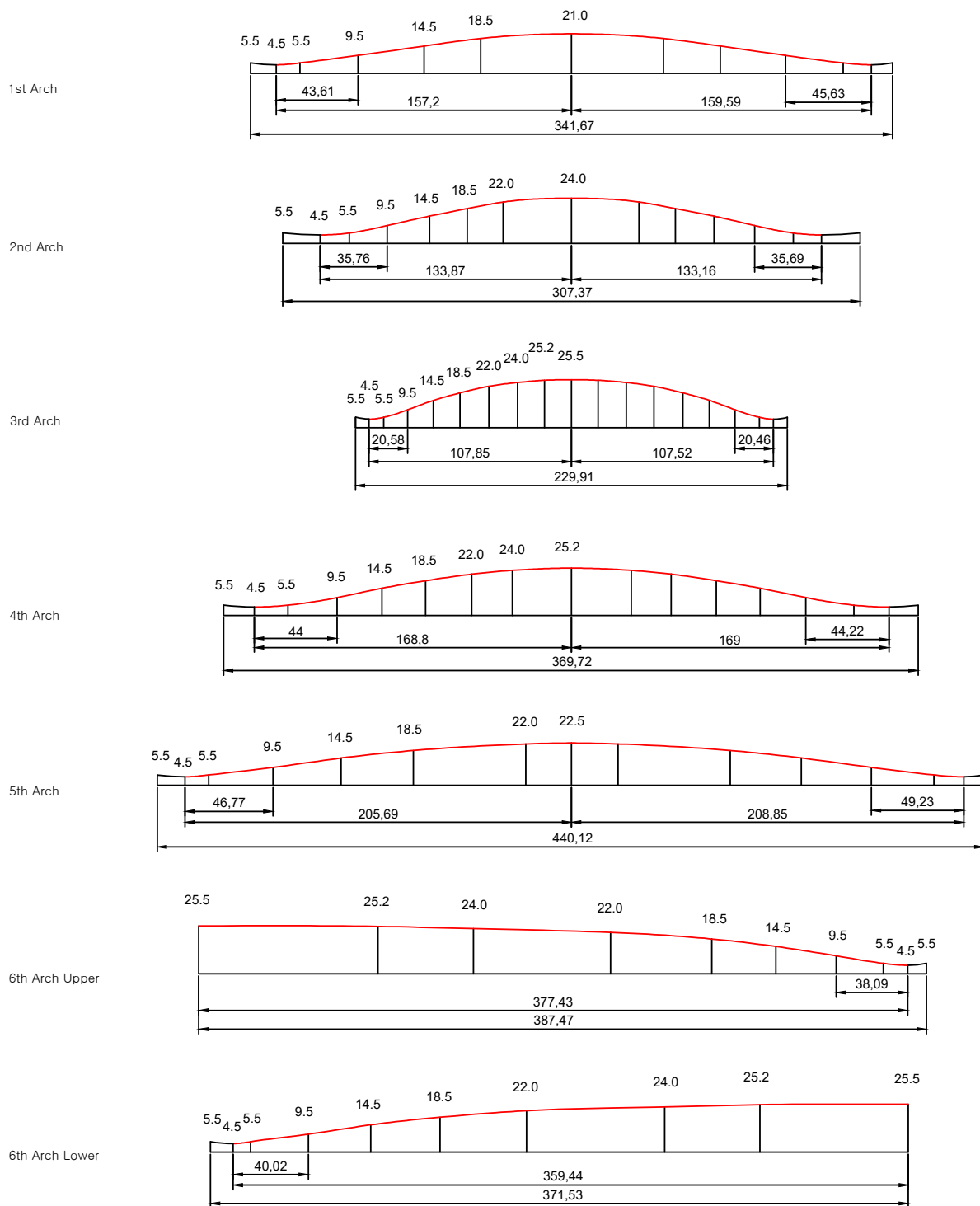


Figure 7: Model C, Cello Front

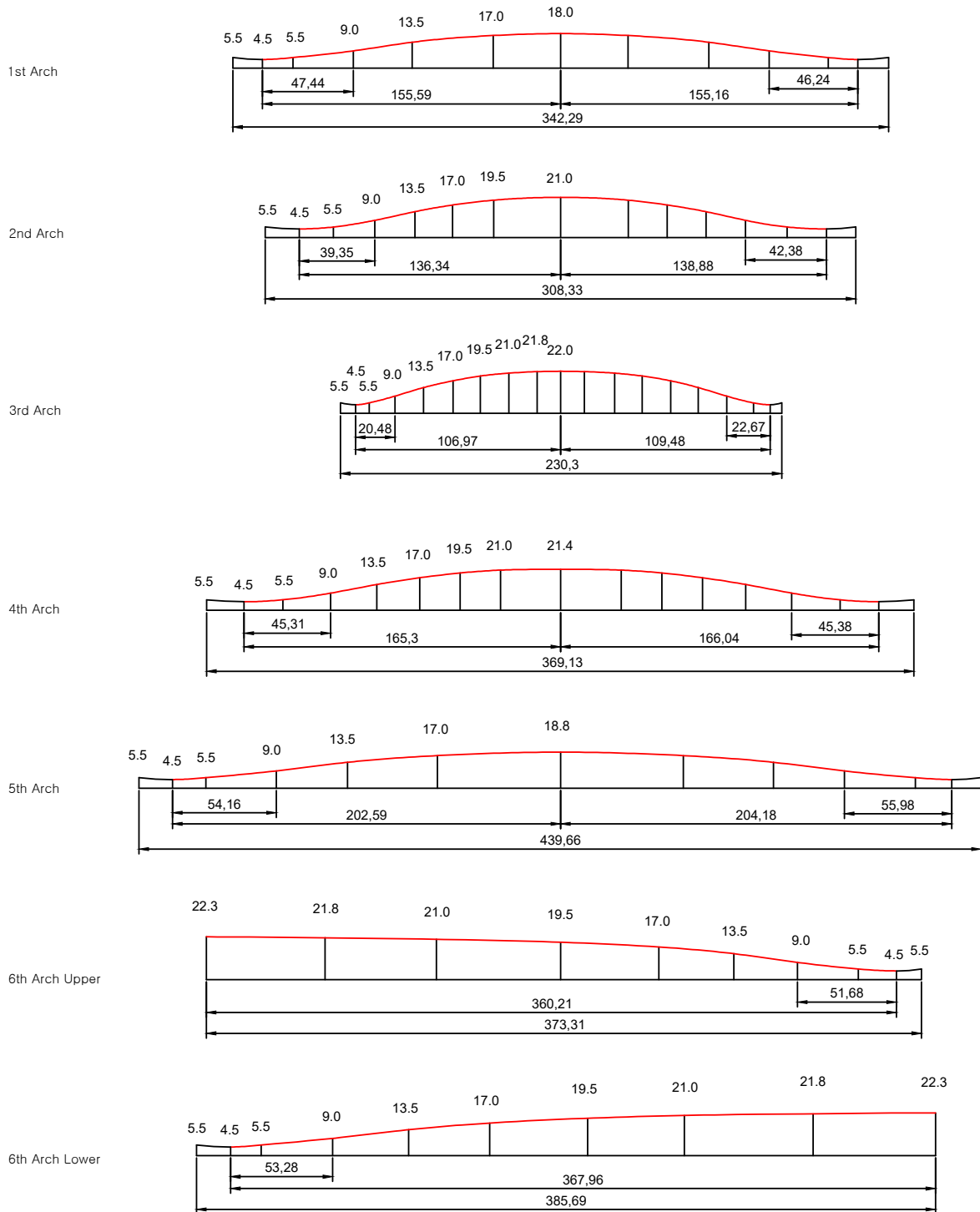


Figure 8: Model C, Cello Back

2.2 모델 D

모델 D는 바이올린 ‘티치아노(Antonio Stradivari, Titian, 1715)’입니다. 재현에는 스트라드(The Strad)사의 포스터 자료(수치 및 아치 이미지)를 사용합니다. 모델 A, B, C와 달리 이 자료는 최신 기술인 CT 스캔을 이용했으므로 더 정확한 아치 형태를 기대할 수 있습니다. 하지만 등고선 데이터가 없어, 이미지에서 직접 등고선을 추출해야 합니다. 포스터를 이용한 모델링 방법은 다음과 같습니다.

1. 포스터의 아치 이미지를 스캔합니다.
2. 스캔한 이미지의 아치 폭이 자료의 수치와 일치하도록 축척을 조절합니다.
3. 축척을 조절한 이미지에서 캐드(CAD) 프로그램의 스플라인 기능을 이용해 아치 곡선을 추출합니다.
4. 3번 아치의 폭을 기준으로 등고선 간격을 균등하게 나눈 뒤, 각 지점의 높이를 추출합니다.
5. 4번에서 얻은 등고선 높이값을 기준으로, 나머지 아치들의 등고선 위치를 찾아 표시합니다.

이미지에서 아치 곡선을 추출할 때는, 캐드 프로그램을 이용하여 선의 두께가 충분히 두꺼워지도록 화면을 확대한 후 선의 중앙을 지나는 스플라인을 작성하였습니다. 3번 아치에서 등고선을 추출할 때에는, 3번 아치의 폭을 17등분 하고 아치 끝점에서부터 홀수번째 지점을 등고선의 위치로 설정합니다. 즉, 1,3,5,...15번째 등분 지점을 등고선 위치로 설정합니다. 이로써 8개의 등고선을 작성할 수 있습니다.

Figure 9, 10은 완성된 모델 D의 모습입니다. 이 모델은 몇 가지 문제점이 있습니다. 먼저, 아치는 매끄럽지만 좌우 비대칭이 심합니다. 특히 사운드포스트 쪽이 많이 튀어나와 있습니다. 둘째, 앞판 6번 아치는 중앙부가 주변보다 낮아 정점의 위치를 특정하기 어렵습니다. 아치를 재현하려면 정점의 위치가 반드시 필요합니다. 그래서 브리지 부근을 약 0.01 올리는 최소한의 보정을 했습니다. 이 때문에 앞판 6번 아치의 정점 위치는 정확하지 않을 수 있습니다. 셋째, 6번 아치의 정점이 3번 아치의 정점보다 낮은데, 이는 포스터 제작 과정의 오차로 보입니다. 마지막으로, 뒤판 6번 아치의 상하단 에지 폭이 매우 좁습니다. 앞판 6번 아치 정점에 대한 보정을 제외한 나머지 문제점들은 그대로 두고, 자료의 형태를 그대로 사용합니다.

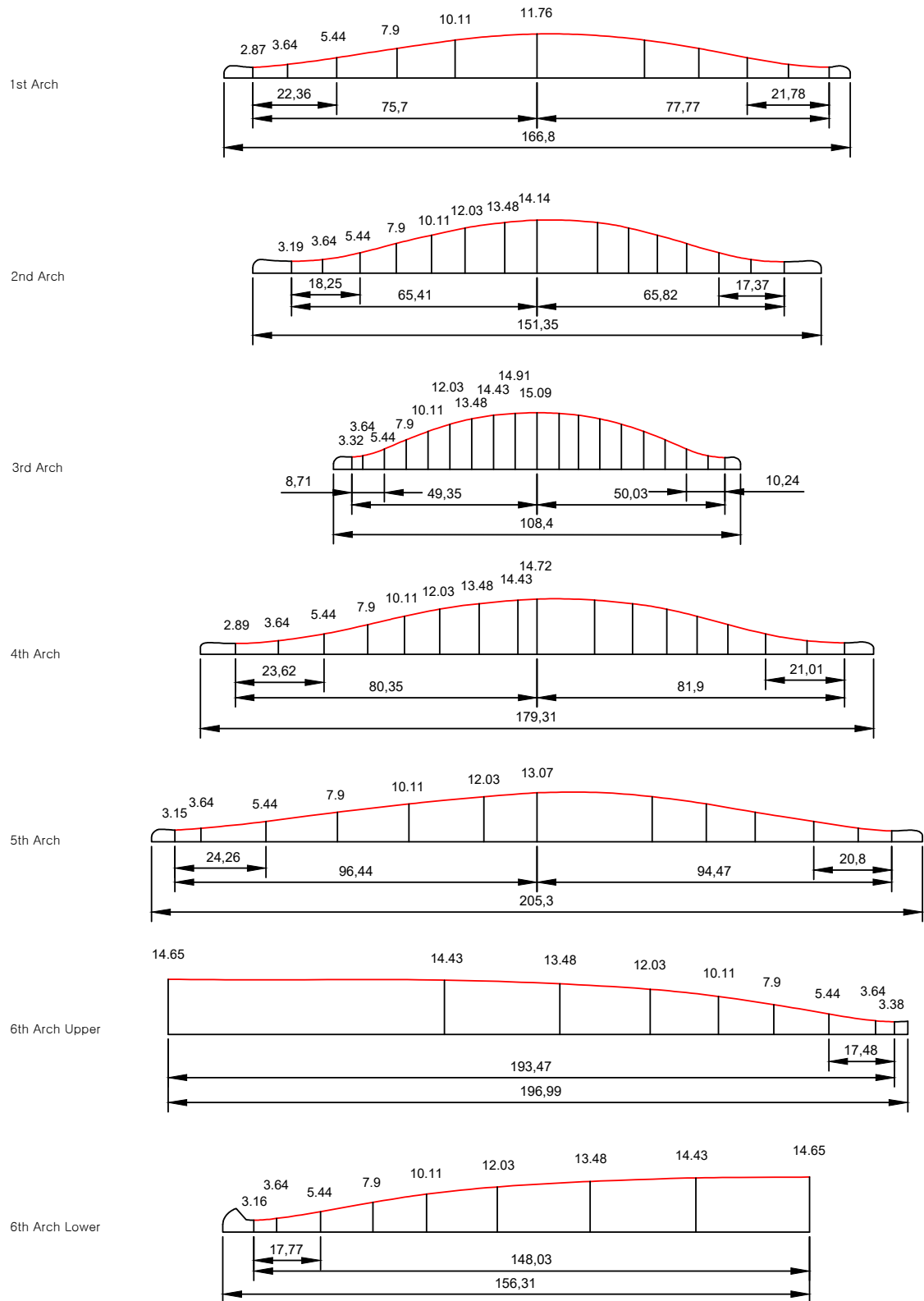


Figure 9: Model D, Titian Front

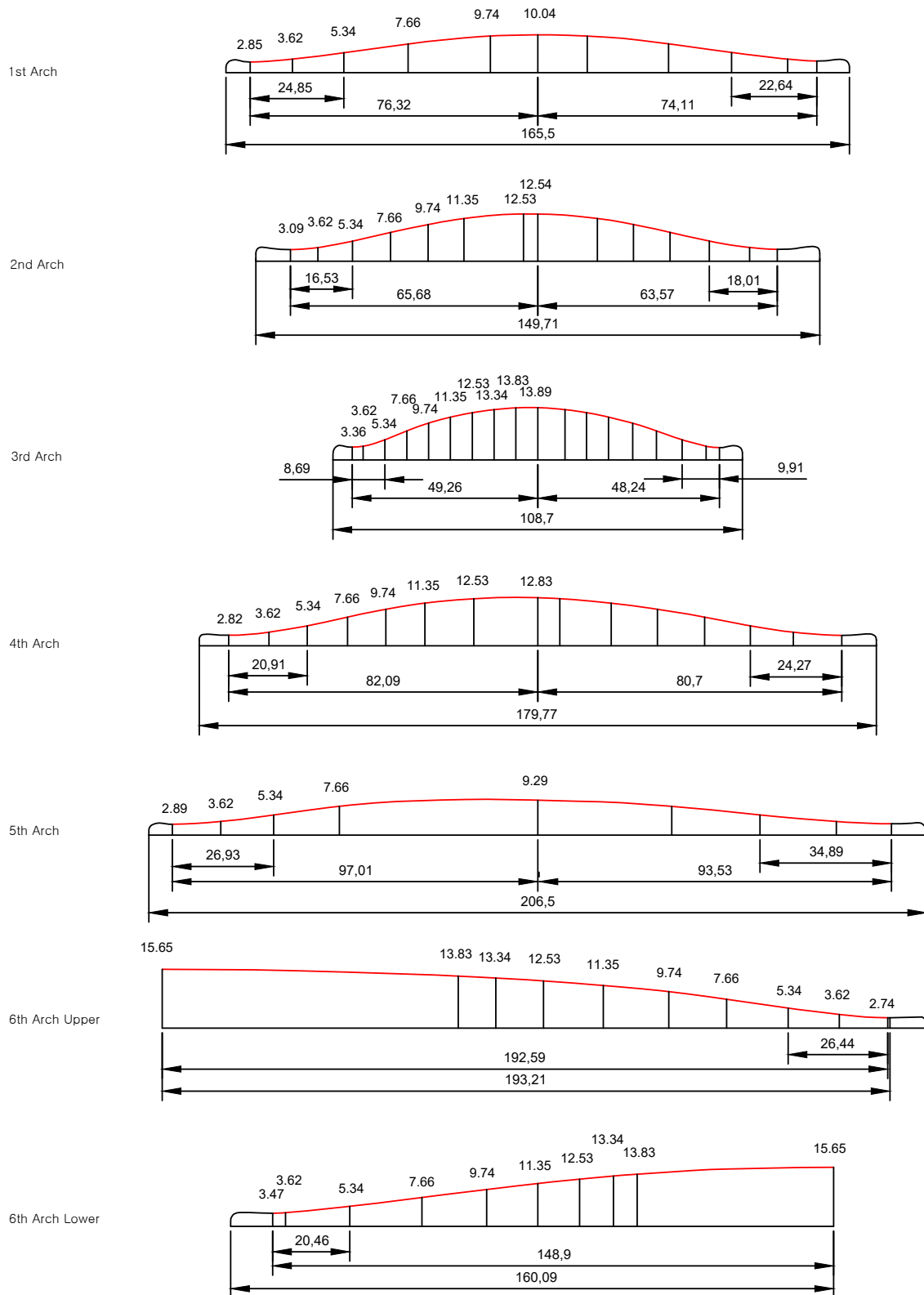


Figure 10: Model D, Titian Back

3 트로코이드

스트라디바리 아치와 가장 유사하다고 알려진 커테이트 트로코이드(CTD)는 트로코이드(TD)의 한 종류입니다. TD는 생성 원리에 따라 여러 가지 곡선으로 나뉩니다. 이번 장에서는 TD의 종류별 정의와 특성을 알아보고, CTD의 문제점과 해결책을 설명하겠습니다.

3.1 트로코이드의 정의와 종류

Definition 3.1. 트로코이드(Trochoid, TD)

반지름이 r 인 원 A 가 직선을 따라 굴러가거나, 반지름이 R 인 다른 원 B 의 안쪽(내접) 또는 바깥쪽(외접)을 따라 미끄러짐 없이 굴러갈 때, 원 A 의 중심으로부터 d 만큼 떨어진 점 P 가 그리는 궤적

Definition 3.1에 따라 TD는 Table 2와 같이 총 9개의 곡선으로 분류됩니다.

Type	Name	Base	d, r	r, R	Shape
Basic Trochoid	Curtate Trochoid	Line	$d < r$	\cdot	Wavy
	Cycloid	Line	$d = r$	\cdot	Pointed
	Prolate Trochoid	Line	$d > r$	\cdot	Looped
Hypotrochoid	Curtate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Hypocycloid	Circle (inscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped
Epitrochoid	Curtate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Epicycloid	Circle (circumscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped

Table 2: Types of Trochoid curves. r :radius of circle A , R :radius of circle B , d :distance from the center of circle A to the tracing point P . Wavy:violin arch shape, Looped:shape of α rotated 90 degrees.

TD는 크게 3가지 유형으로 나뉘며, 첫번째 기본 트로코이드(Basic Trochoid)는 원이 직선을 따라 굴러갈 때를 의미하며, 두번째 하이포트로코이드(Hypotrochoid)는 작은 원이 큰 원의 내부를 따라 굴러가는 경우이며, 세번째 에피트로코이드(Epitrochoid)는 작은 원이 큰 원의 외부에 따라 굴러갈 경우를 지칭합니다. 또한 $d < r$ 일 때는 커테이트(Curtate), $d = r$ 일 때는 사이클로이드(Cycloid), $d > r$ 일 때는 프로레이트(Prolate), 원에 내접할 때에는 하이포(Hypo), 원에 외접할 때에는 에피(Epi)라는 명칭이 부여됩니다.

TD의 명칭에서 특이한 점은, $d = r$ 일 때는 트로코이드라는 명칭을 사용하지 않고 ‘사이클로이드’라는 명칭을 사용한다는 점과, $r > R$ 은 정의상 성립하지 않으므로 그러한 곡선은 트로코이드라고 부르지 않는다는 점입니다. 따라서, 일부 문헌에서 관용적으로 사용되고 있는 ‘커테이트 사이클로이드(Curtate Cycloid)’라는 용어는 수학적으로는

추천하지 않는 표현이며 '커테이트 트로코이드(Curtate Trochoid)'가 더 적절한 표현입니다.

다음 장에서는 커테이트 트로코이드에 대해 더 자세히 알아보겠습니다.

3.2 커테이트 트로코이드

여기서는 CTD가 어떤 곡선인지 알아보고, 모델과 비교하여 어떤 문제점이 있는지 파악해 보겠습니다.

3.2.1 커테이트 트로코이드의 정의

CTD는 다음과 같이 정의합니다.

Definition 3.2. 커테이트 트로코이드(Curtate Trochoid, CTD)

반지름이 r 인 원 A 가 직선을 따라 미끄러짐 없이 굴러갈 때, 원 A 의 중심으로 부터 d 만큼 떨어져 있는 점 P 가 그리는 궤적. (단, $d < r$)

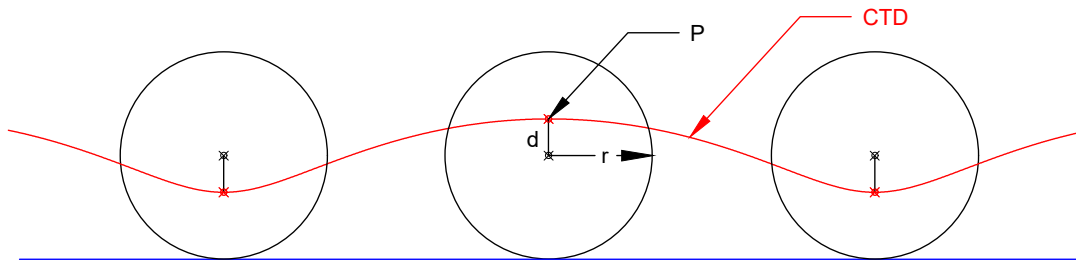


Figure 11: Curtate Trochoid

CTD는 동일한 패턴의 곡선이 반복되는 구조입니다. 이 곡선에서 점 P 가 가장 높은 지점이 아치의 정점이 됩니다. 그리고 정점에서 원이 좌우로 반 바퀴 굴러 점 P 가 가장 낮은 지점에 왔을 때가 아치의 양 끝점이 됩니다.

CTD는 수학적으로 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\begin{cases} x = r\theta - d \sin(\theta) \\ y = r - d \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

r : 굴러가는 원(바퀴)의 반지름

d : 원의 중심에서 점 P 까지의 거리(단, $d < r$)

θ : 원이 회전한 각도

Figure 11에서, CTD 곡선은 동일한 패턴이 반복됩니다. 이 중 아치에 해당하는 한 구간만 잘라낸 것을 ‘커테이트 트로코이드 아치(Curtate Trochoid Arch, CTDA)’라고 부르겠습니다.

CTDA의 폭 W 는 원의 원주와 동일하며 높이 H 는 d 의 두배와 동일하므로,

$$\begin{cases} W = 2\pi r \\ H = 2d \end{cases} \quad (2)$$

입니다. 따라서 아치의 폭을 넓히고 싶으면 반지름 r 을 키우고, 아치의 높이를 높이고 싶으면 d 를 키우면 됩니다. 여기서 알 수 있는 중요한 사실은 CTDA는 폭과 높이 외에 다른 형태적 요소는 바꿀 수 없으므로 폭과 높이가 같은 CTDA는 단 하나의 모양만 존재한다는 것입니다. 즉,

CTDA는 아치의 ‘충만도’를 조절할 수 없다.

바로 이 점이 CTDA를 스트라디바리 아치 재현에 사용하기 어려운 결정적인 이유입니다.

3.2.2 CTDA vs 스트라디바리 아치

여기서는 CTDA를 모델의 아치와 비교하여 어떤 문제가 있는지 알아보겠습니다. Figure 12~19는 모델 A, B, C, D의 앞판과 뒤판 아치를 CTDA 및 원호와 비교한 것입니다. 비교 대상은 각 모델의 좌측 아치입니다. 앞판은 베이스 바 쪽, 뒤판은 사운드 포스트 쪽이며, 첼로는 그 반대입니다. 그림에서 붉은 선은 모델 아치, 파란 선은 CTDA, 검은 선은 원호를 나타냅니다.

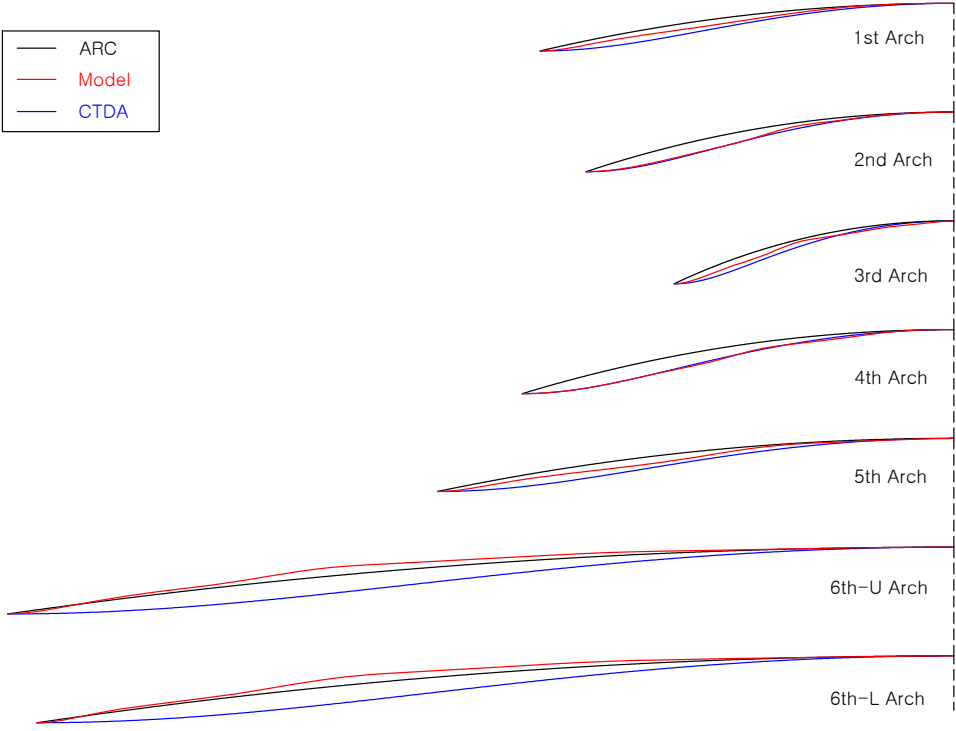


Figure 12: Model A, Violin Front(Bass bar side)

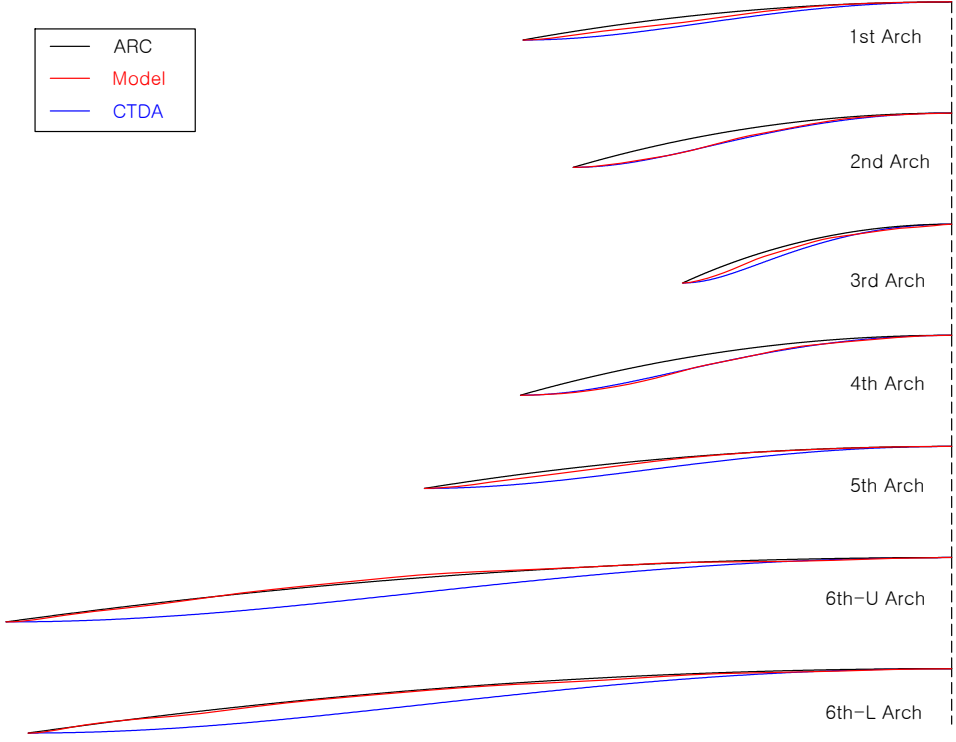


Figure 13: Model A, Violin Back(Sound post side)

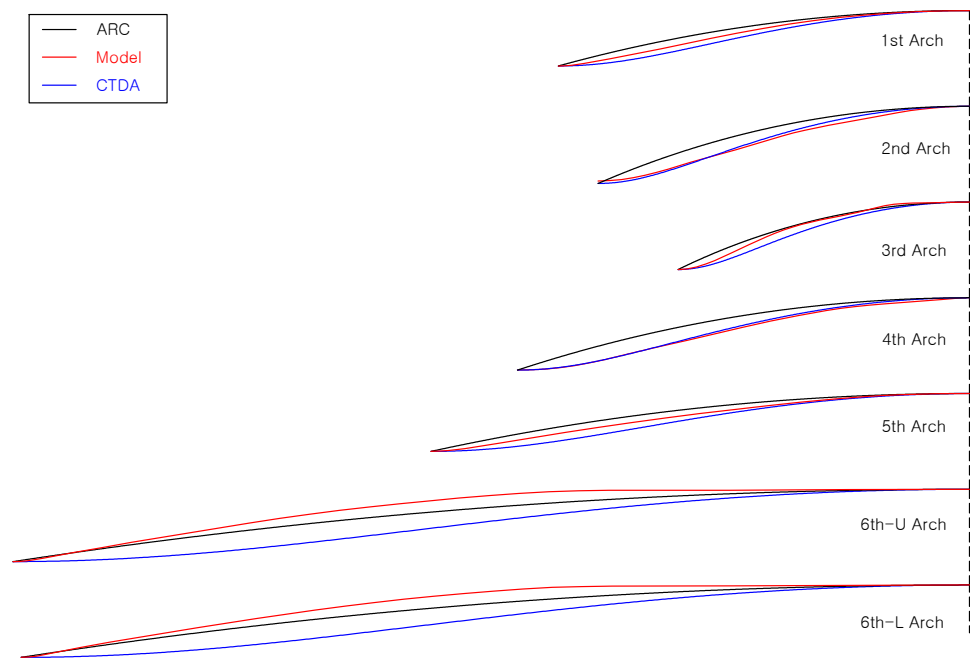


Figure 14: *Model B, Viola Front(Bass bar side)*

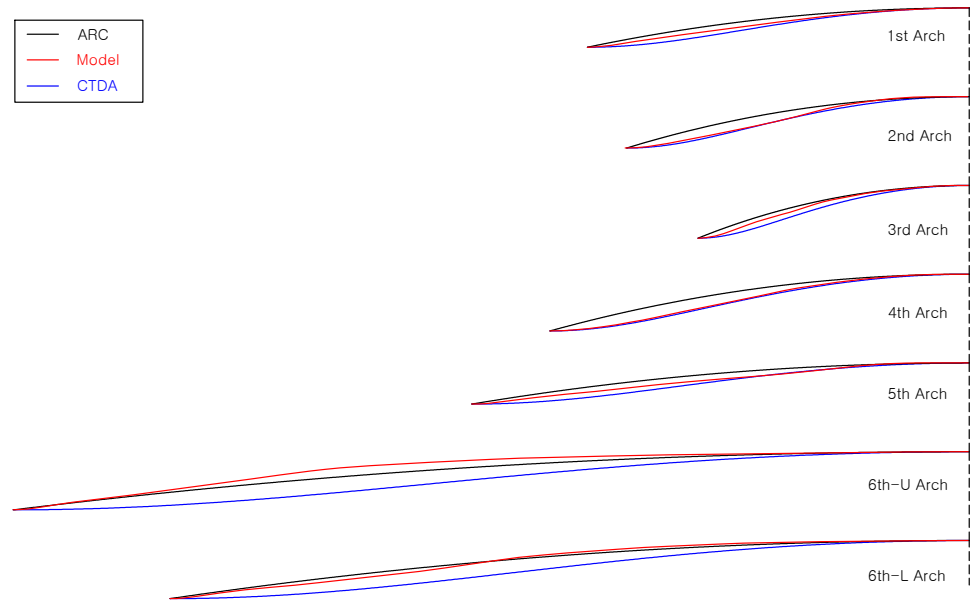


Figure 15: *Model B, Viola Back(Sound post side)*

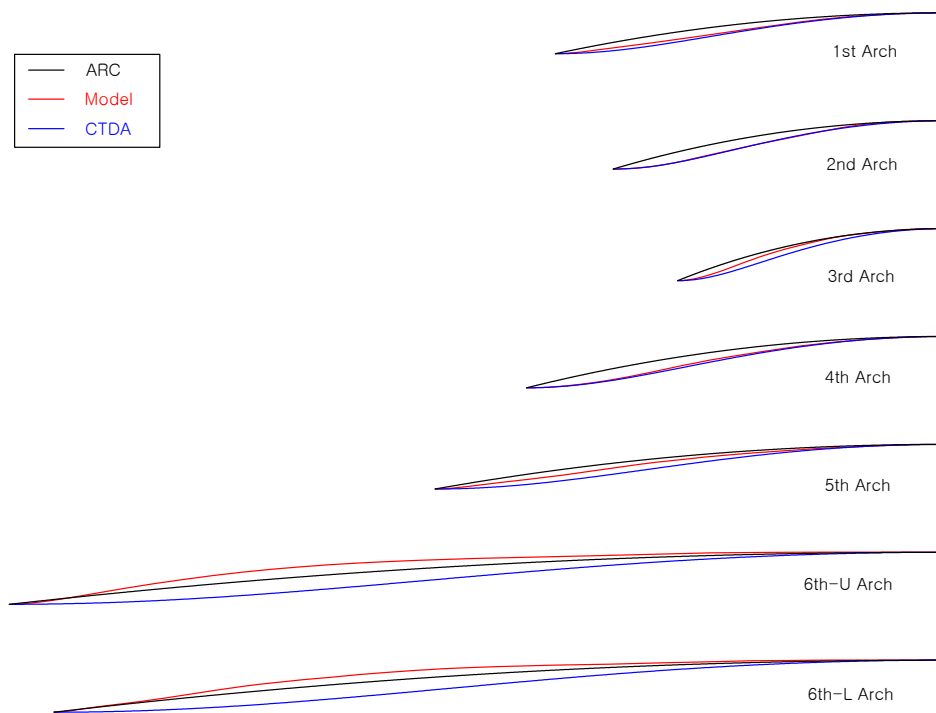


Figure 16: *Model C, Cello Front(Sound post side)*

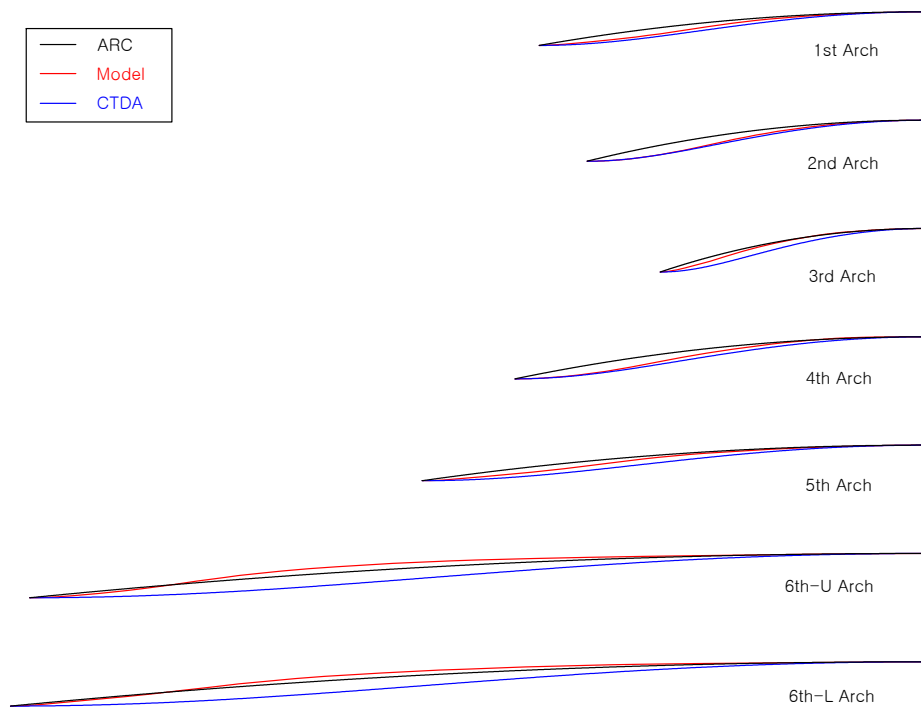


Figure 17: *Model C, Cello Back(Bass bar side)*

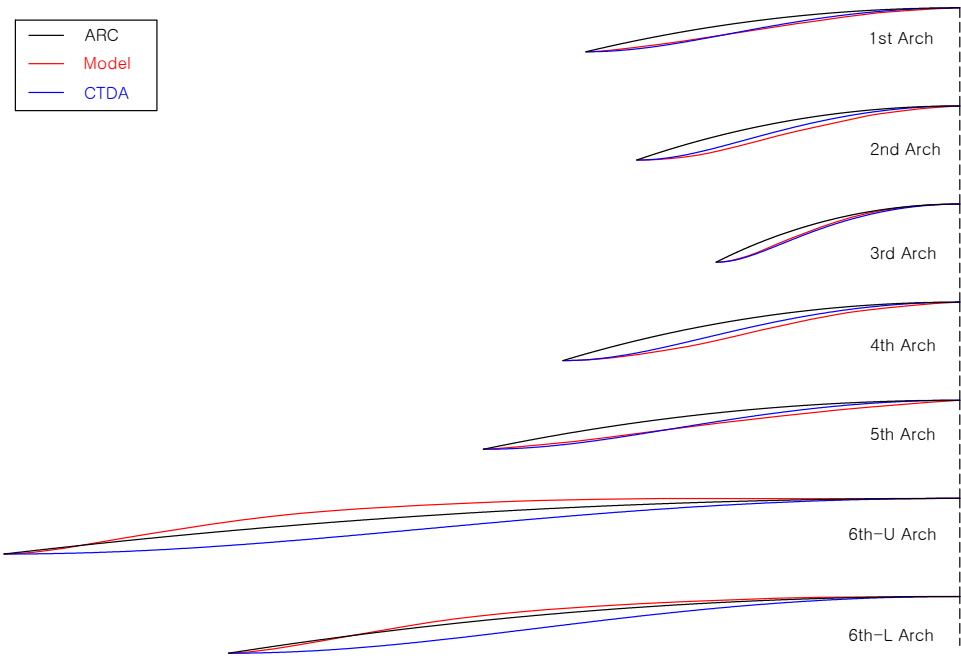


Figure 18: *Model D, Titian Front(Bass bar side)*

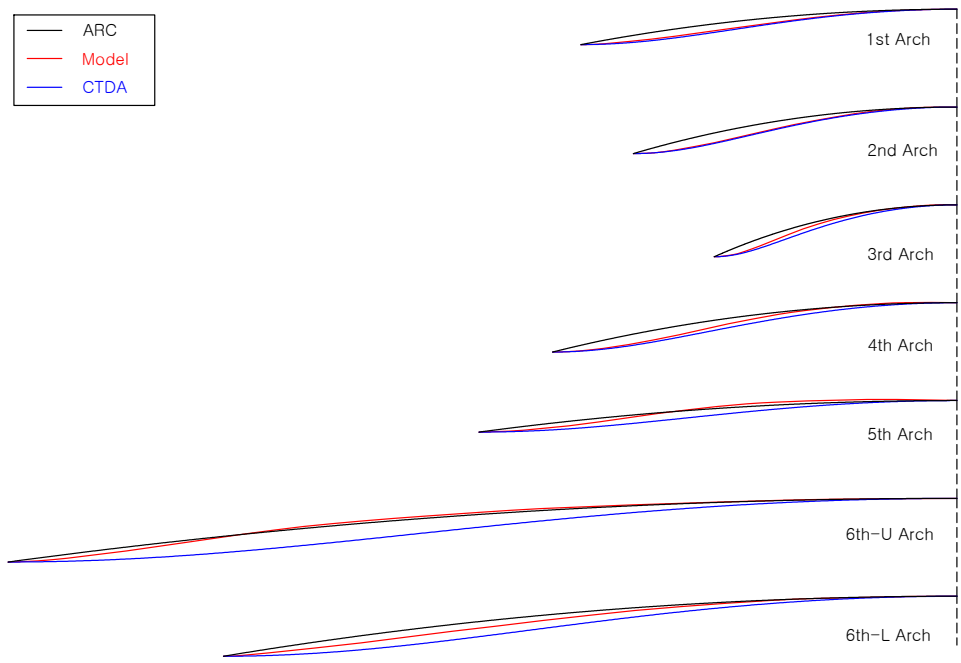


Figure 19: *Model D, Titian Back(Sound post side)*

위 그림들을 통해 모델 아치의 특징을 분석하면 다음과 같습니다.

- 1, 3, 5번 아치: 원호와 CTDA의 중간 형태로, CTDA보다 충만도가 크고 원호보다는 작습니다.
- 2, 4번 아치: CTDA와 매우 유사하여 충만도가 비슷합니다.
- 6번 아치: 앞판은 원호보다 충만도가 더 크며, 뒤판은 원호와 비슷하거나 약간 더 큼니다.

또한 모델 D의 앞판 2, 4번 아치는 CTDA보다 충만도가 더 작다는 점도 확인할 수 있습니다.

요약하자면, CTDA는 스트라디바리 아치에 비해 대부분 충만도가 부족하며, 일부 아치에서는 비슷하거나 오히려 조금 과합니다. 이는 CTDA만으로는 스트라디바리 아치를 완벽하게 재현할 수 없다는 것을 의미합니다. 따라서 스트라디바리 아치를 재현하기 위해서는,

폭과 높이를 유지하면서 충만도를 조절할 수 있어야 한다.

라는 결론에 이르게 됩니다. 그 해답을 찾기 위해 다시 CTDA의 정의로 돌아가 보겠습니다.

CTD의 정의에는 “원이 직선을 따라 구른다”는 조건이 있습니다. 만약 이 직선을 ‘곡선’으로 바꾸면 어떻게 될까요?

Figure 20은, 원이 직선을 따라 굴러가는 경우와 원이 곡선을 따라 굴러갈 때 생성되는 아치를 보여줍니다. 상단은 위쪽으로 휜 곡선, 중앙은 직선(CTDA), 하단은 아래쪽으로 휜 곡선을 따라 원이 굴러가는 경우입니다.

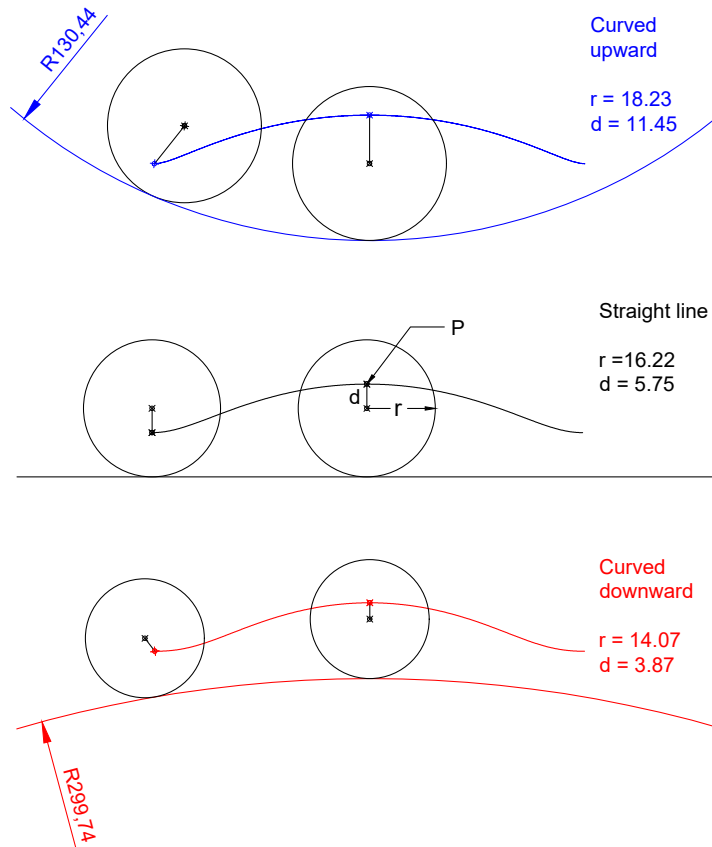


Figure 20: Arches created by a circle rolling on a curve vs. a CTDA

더 정확히 말해, 상단은 원이 다른 원의 안쪽을 구르는 경우(내접)이고, 하단은 바깥쪽을 구르는 경우(외접)입니다. 세 아치의 충만도를 정확히 비교하기 위해서는 모든 아치의 폭과 높이가 동일해야 하므로 파라미터(R, r, d)의 값은 적절히 조정된 상태이며, 아래의 Figure 21은 세가지 아치를 비교하기 쉽도록 겹쳐놓은 그림입니다.

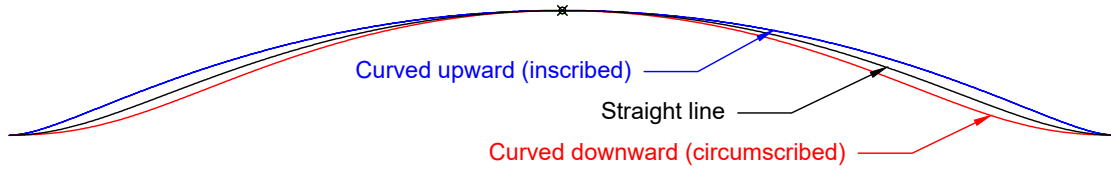


Figure 21: Comparison of arches created by a circle rolling on a curve and a CTDA

Figure 20과 21은 본 보고서의 핵심을 보여줍니다.

- 원이 위쪽으로 흰 곡선을 따라 구를 때 생성되는 아치는 CTDA 보다 충만도가 더 크다.
- 원이 아래쪽으로 흰 곡선을 따라 구를 때 생성되는 아치는 CTDA 보다 충만도가 더 작다.

는 것을 알 수 있습니다. 즉,

CTD에서 기준선을 직선 대신 곡선으로 바꾸면 아치의 충만도를 조절할 수 있다.

는 결론을 얻을 수 있습니다. 여기에서, 아래/위로 흰 곡선(원)의 반지름(R)이 무한대에 가까워지면 직선이 되므로, 그 결과는 CTDA와 거의 같아집니다. 반대로 반지름을 줄여나가면, 내접할 때는 충만도가 커지고 외접할 때는 충만도가 작아집니다.

앞의 Table 2에서 설명했듯이, 원이 다른 원 위를 굴러갈 때 생성되는 곡선이 바로 하이포트로코이드와 에피트로코이드입니다. 그림의 파란색 아치가 바로 ‘커테이트 하이포트로코이드(Curtate Hypotrochoid, CHT)’이며, 붉은색 아치는 ‘커테이트 에피트로코이드(Curtate Epitrochoid, CET)’입니다. 즉, CHT와 CET를 사용하면 폭과 높이를 유지하면서 아치의 충만도를 자유롭게 조절할 수 있습니다. 단, 아치 형태의 곡선을 얻으려면 반드시 $d < r$ 와 $r < R$ 조건을 만족해야 합니다. 만약 $d = r$ 이 되면 양 끝이 뾰족해져 아치의 기본 조건을 벗어나고, $r > R$ 이면 전혀 다른 모양의 곡선이 되기 때문입니다.

3.3 커테이트 하이포트로코이드

3.3.1 커테이트 하이포트로코이드의 정의

CHT는 다음과 같이 정의합니다.

Definition 3.3. 커테이트 하이포트로코이드(Curtate hypotrochoid, CHT)

반지름이 R 인 큰 원 B 의 안쪽을, 반지름이 r 인 작은 원 A 가 미끄러짐 없이 굴러갈 때, 작은 원 A 의 중심에서 d 만큼 떨어진 점 P 가 그리는 궤적(단, $d < r, r < R$)

CHT와 CTD의 가장 큰 차이점은 원이 직선이 아닌, 다른 원의 안쪽을 따라 구른다는 것입니다.

수학적 표현은 다음과 같습니다.

$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r) \cos(\theta) + d \cdot \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R - r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (3)$$

R : 외부 원 B 의 반지름

r : 내부 원 A 의 반지름(단, $r < R$)

d : 내부 원 A 의 중심에서 점 P 까지의 거리(단, $d < r$)

θ : 내부 원이 회전한 각도

Figure 22는 CHT의 한 예입니다. CHT는 작은 원이 계속 회전하며 만드는 연속적인 곡선입니다. 따라서 아치의 폭, 높이, 충만도 등을 분석하려면, 이 연속된 곡선에서 아치에 해당하는 한 구간을 추출해야 합니다. 이렇게 CHT에서 추출한 아치를 'CHTA(Curtate Hypotrochoid Arch)'라 부르겠습니다. 아치를 정확히 추출하려면 정점과 끝점의 위치를 알아야 하므로 두 지점을 다음과 같이 정의하겠습니다.

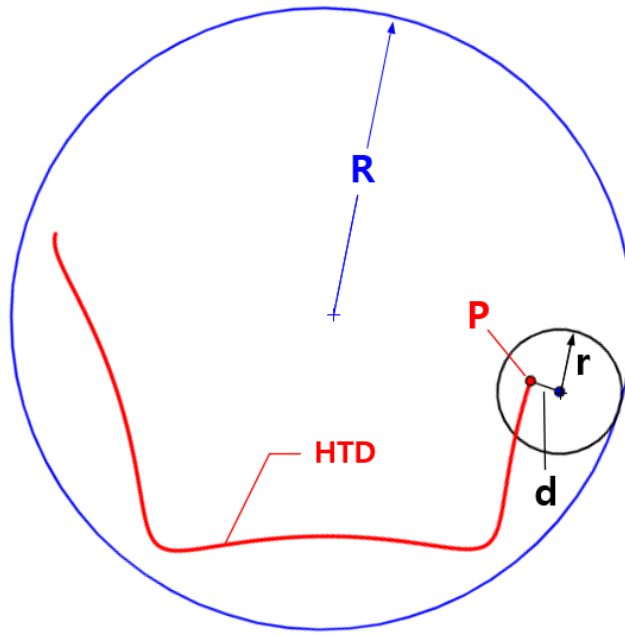


Figure 22: Hypotrochoid

Definition 3.4. 커테이트 하이포트로코이드의 정점

큰 원 B 의 중심에서 가장 가까운 궤적선 위의 한 점

Definition 3.5. 커테이트 하이포트로코이드의 끝점

큰 원 B 의 중심과 정점을 잇는 선에 수직인 직선이 접선이 되는, 꺾적 위의 두 점. 이 두 점은 정점을 기준으로 좌우 대칭인 위치에 있다

정점을 찾는 것은 간단하지만 끝점을 찾기는 어렵습니다. CHT는 전체적으로 회전하며 동일한 패턴을 반복하므로, 우리가 추출하려는 아치가 정확히 수평으로 놓여 있을 확률이 거의 없기 때문입니다. CHT에서 아치를 추출하는 방법은 다음과 같습니다.

3.3.2 커테이트 하이포트로코이드에서 아치 추출

CHT는 동일한 패턴이 반복되는 곡선입니다. 여기서 아치를 추출하려면 정점과 끝점을 정확히 찾아야 합니다. 추출 과정은 다음과 같습니다.

1. CHT 곡선을 그립니다. - Figure 23. (a) -
2. 서로 인접한 두 지점 중, 큰 원 B 의 중심에서 가장 먼 두 점(붉은 점)을 '임시 끝점'으로 정합니다. -(a) -
3. 두 임시 끝점 사이의 구간을 추출하여 '임시 아치'를 만듭니다. -(b) -
4. 임시 아치의 양 끝점이 수평이 되도록 전체 곡선을 회전시킵니다. -(b) -
5. 회전된 임시 아치에서 접선 기울기가 '0'이 되는 지점, 즉 실제 아치의 끝점(녹색 점)을 찾습니다. -(b) -
6. 찾아낸 두 실제 끝점(녹색 점) 사이의 구간을 최종 아치로 추출합니다. -(c) -

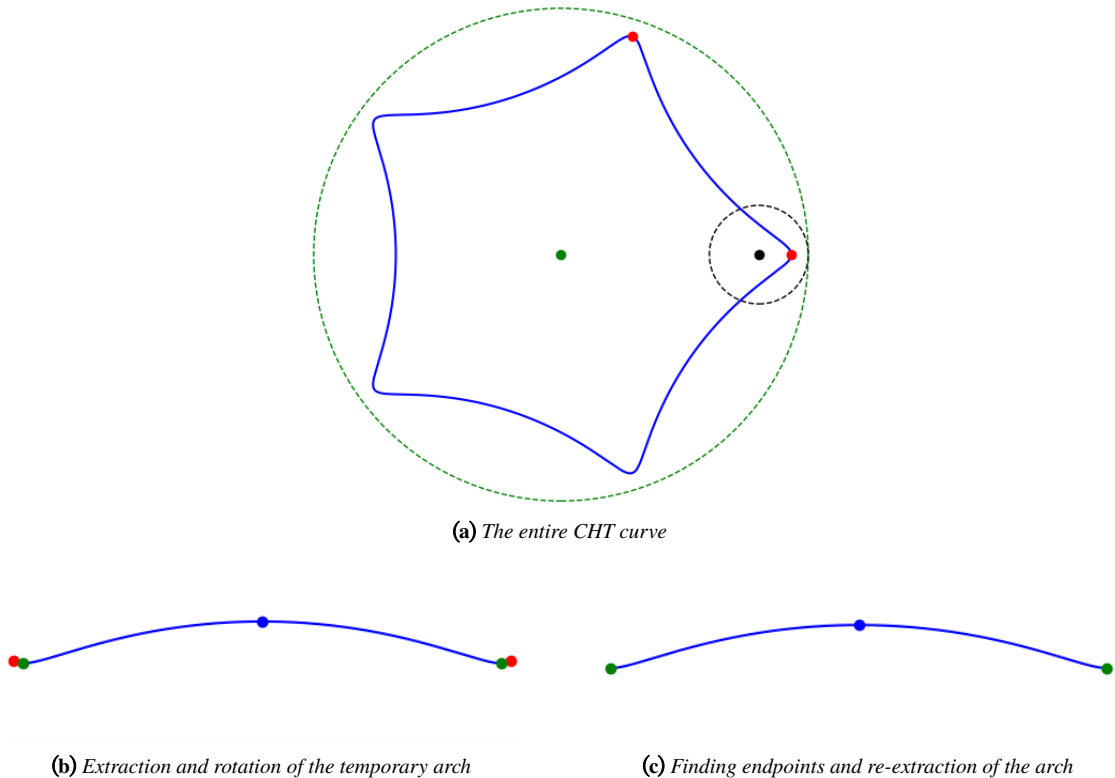


Figure 23: Process of extracting an arch from a CHT

이렇게 CHTA를 추출하면 비로소 아치의 폭, 높이, 충만도를 판단할 수 있습니다. 그러나 폭과 높이는 쉽게 측정할 수 있지만, 충만도를 판단하려면 별도의 기준이 필요합니다.

3.3.3 커테이트 하이포트로코이드 아치의 충만도

CHTA의 충만도를 판단하기 위해서는 판단의 기준점이 필요합니다. 이 기준점을 ‘충만도 제어점(Fullness control point) Z ’ 라고 부르겠습니다. 충만도 제어점 Z 는 아치 선상의 임의의 한 점으로서, 아치 끝단에서 x 방향으로 아치 폭의 $1/8 \sim 1/6$ 가량 떨어진 곳으로 선정합니다. 이 구간은 아치의 충만도가 변할 때 변위가 가장 큰 부위로서 충만도 변화를 더 쉽게 판별할 수 있기 때문입니다.

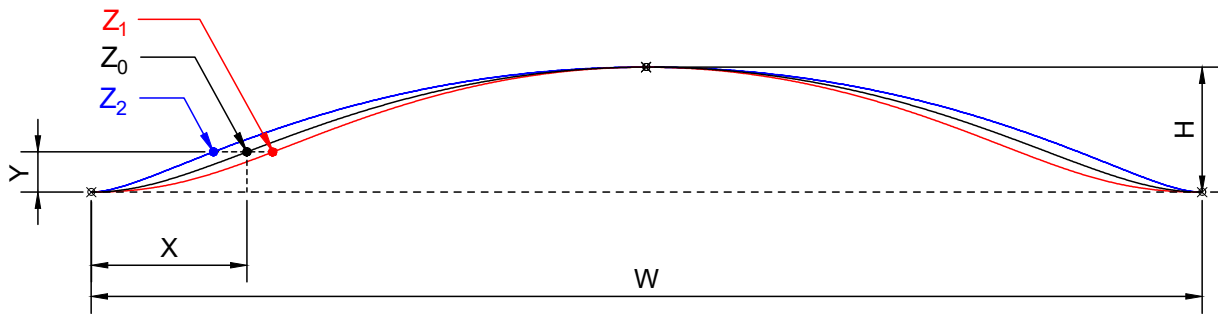


Figure 24: Fullness control point Z

Figure 24는 세 아치의 충만도를 비교하기 위해 각각의 충만도 제어점(Z_0, Z_1, Z_2)을 표시한 것입니다. 세 제어점은 모두 y 축 높이는 같지만, x 축 위치가 다릅니다. 기준점 Z_0 (검은색 아치)에 비해 Z_1 (붉은색 아치)은 아치 안쪽(오른쪽)에 있으므로 충만도가 더 작다고 판단합니다. 반면 Z_2 (파란색 아치)는 아치 바깥쪽(왼쪽)에 있으므로 충만도가 더 크다고 할 수 있습니다.

이러한 원리를 이용해 CHTA의 충만도를 조절하려면, 목표로 하는 충만도 제어점의 위치를 먼저 지정해야 합니다. 그리고 아치가 그 지점을 지나도록 만드는 CHT 파라미터(R, r, d)를 찾아야 합니다. CHTA는 폭·높이·충만도를 모두 만족하는 파라미터를 찾는 과정이 매우 복잡합니다. 이어지는 내용에서는 그 이유와 함께, 세 가지 조건을 모두 만족하는 CHTA를 만드는 방법을 설명하겠습니다.

3.3.4 커테이트 하이포트로코이드 아치의 특성

원하는 폭·높이·충만도를 가진 CHTA를 만들려면, 파라미터(R, r, d) 변화에 따라 아치의 형태가 어떻게 달라지는지 이해해야 합니다.

Figure 25는 R, r, d 를 각각 변경했을 때 아치가 어떻게 변하는지 보여줍니다. R 이 감소하면 폭과 높이가 모두 감소하고, r 이 증가하면 폭은 늘지만 높이는 줄어듭니다. d 가 증가하면 폭과 높이 모두 증가합니다. 여기서 주의할 점은, 이 그림만으로는 충만도의 변화를 판단할 수 없다는 것입니다. 폭과 높이가 함께 변했기 때문입니다. (단, 앞서 확인했듯이 폭과 높이를 동일하게 맞춘다면 R 이 감소할수록 충만도는 증가합니다.)

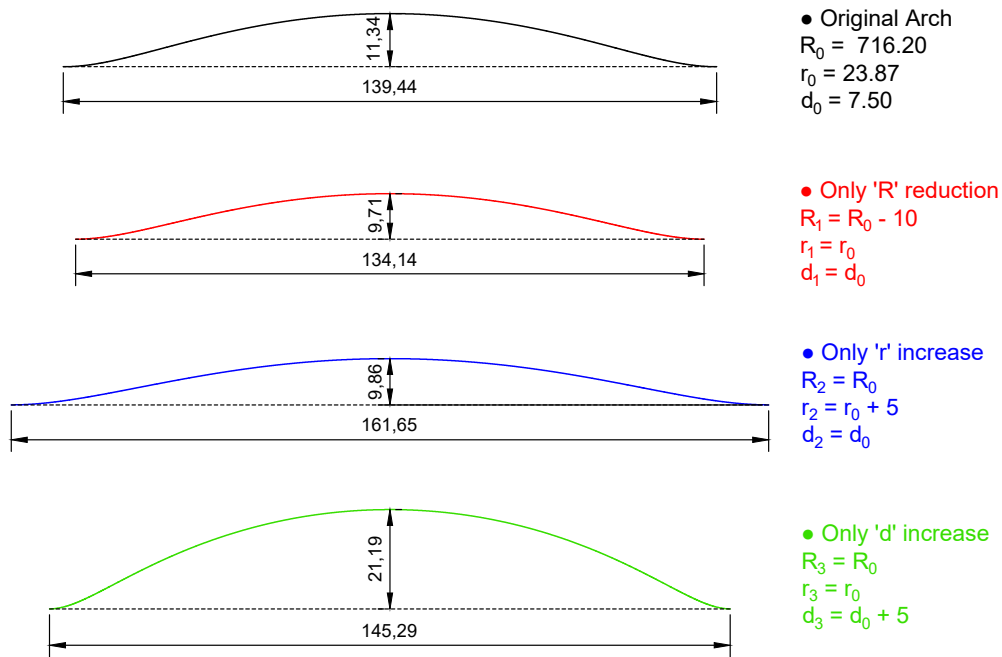


Figure 25: Change in CHTA shape according to parameter variation

이처럼 CHTA는 CTDA와 달리 특성이 복잡하여 원하는 아치를 얻기 쉽지 않습니다. 이 때문에 컴퓨터를 이용한 수많은 반복 계산이 필요합니다. CHTA의 파라미터별 특성을 표로 정리하면 다음과 같습니다. Table 3에서 폭과 높이는 단순히 파라미터만 변경했을 때의 결과이고, 충만도는 폭과 높이를 동일하게 유지했을 때의 결과입니다.

Parameter	Width	Height	Fullness
R −	−	−	−
r +	+	−	·
d +	+	+	·

Table 3: Changes in CHTA according to parameter variation. '+' : increase, '−' : decrease

● R을 줄이면 충만도가 커지는 이유

Figure 26는, 원이 다른 원에 내접할 때, 기준 원의 반지름(R)을 줄이면 왜 아치의 충만도가 커지는지 그 원리를 보여줍니다. (CTDA의 기준선인 직선은 반지름이 무한대인 원으로 생각할 수 있습니다.)

그림을 보면, CTDA는 구르는 원이 정점에서 180° 회전해야 끝점에 도달합니다. 반면 CHTA는 141° 만 회전해도 끝점에 도달합니다. 바로 이 회전각의 차이가 충만도의 변화를 만듭니다. 끝점까지 도달하는 데 필요한 회전각이 줄어들면서, 아치의 끝부분이 정점에 비율적으로 더 가까워집니다. 이는 아치 끝단의 평평한 구간이 짧아지는 효과를 낳고, 결과적으로 충만도가 더 커지는 것입니다.

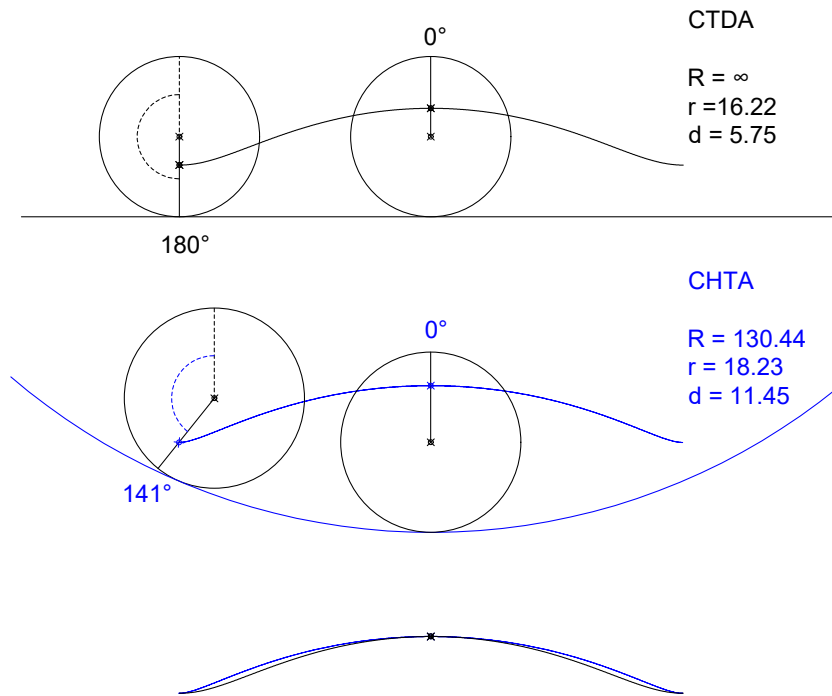


Figure 26: Change in CHTA according to the value of R

반대로 충만도를 줄이고자 할 때는 이와 정반대의 원리가 적용되며, 이는 다음 장에서 자세히 설명하겠습니다.

3.4 커테이트 에피트로코이드

3.4.1 커테이트 에피트로코이드의 정의

CET는 다음과 같이 정의합니다.

Definition 3.6. 커테이트 에피트로코이드(Curtate Epitrochoid, CET)

반지름이 R 인 큰 원 B 의 바깥쪽을, 반지름이 r 인 작은 원 A 가 미끄러짐 없이 굴러갈 때, 작은 원 A 의 중심에서 d 만큼 떨어진 점 P 가 그리는 궤적. (단, $d < r, r < R$)

CET와 CHT의 가장 큰 차이점은, 기준이 되는 큰 원 B 의 안쪽이 아닌 바깥쪽을 따라 구른다는 점입니다.

수학적 표현은 다음과 같습니다.

$$\begin{cases} x(\theta) = (R + r) \cos(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R + r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (4)$$

R : 큰 원 B 의 반지름

r : 작은 원 A 의 반지름(단, $r < R$)

d : 작은 원 A 의 중심에서 점 P 까지의 거리(단, $d < r$)

θ : 작은 원이 회전한 각도

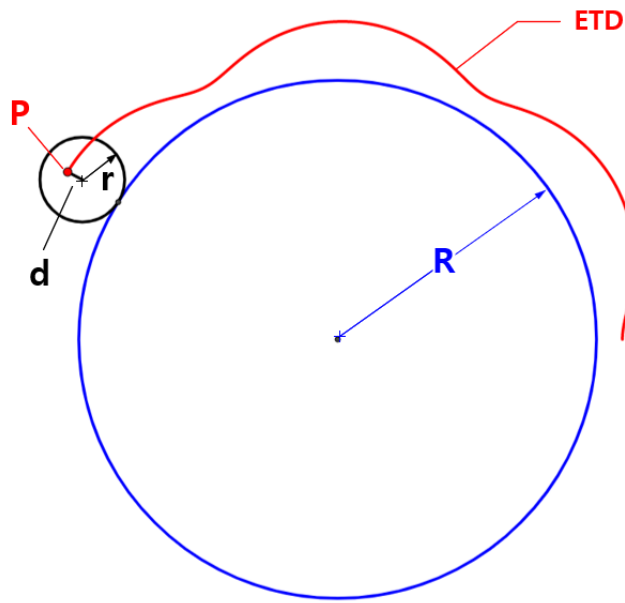


Figure 27: Epitrochoid

Figure 27은 CET의 한 예입니다. CET 역시 CHT처럼 연속된 곡선을 생성하므로, 아치로 사용하려면 이 곡선에서 필요한 한 구간을 추출해야 합니다. 이렇게 CET에서 추출한 아치를 ‘CETA(Curtate Epitrochoid Arch)’라 부르고, 아치의 정점과 끝점은 다음과 같이 정의합니다.

Definition 3.7. CETA의 정점

큰 원 B 의 중심에서 가장 먼 궤적 위의 한 점

Definition 3.8. CETA의 끝점

큰 원 B 의 중심과 정점을 잇는 선에 수직인 직선이 접선이 되는, 궤적 위의 두 점. 이 두 점은 정점을 기준으로 좌우 대칭인 위치에 있다.

CET에서 아치를 추출하는 방법은 CHT와 약간 다르며, 그 과정은 다음과 같습니다.

3.4.2 커테이트 에피트로코이드에서 아치 추출

1. CET 곡선을 그립니다.
2. 큰 원 B 의 중심에서 가장 먼, 인접한 세 지점 중 양 끝 두 점을 임시 끝점으로 정합니다.⁴
3. 두 임시 끝점 사이의 구간을 추출하여 임시 아치를 만듭니다.
4. 임시 아치의 양 끝점이 수평이 되도록 임시 아치를 회전시킨다.
5. 회전된 임시 아치에서 접선 기울기가 0이 되는 지점, 즉 실제 아치의 끝점을 찾습니다.
6. 아치 끝점 사이 구간을 재추출한다.

3.4.3 커테이트 에피트로코이드 아치의 충만도

충만도에 대한 내용은 앞서 설명한 CHTA의 경우와 동일합니다. (Chapter 3.3.3 참고)

3.4.4 커테이트 에피트로코이드 아치의 특성

Figure 28은 R, r, d 값을 변경했을 때 아치의 형태가 어떻게 변하는지 보여줍니다. R 이 감소하면 폭과 높이가 모두 증가하고, r 이 감소하면 둘 다 감소하며, d 가 감소하면 폭은 늘고 높이는 줄어듭니다. 또한 CHTA의 경우와 마찬가지로, 이 그림만으로는 충만도의 변화를 판별할 수 없습니다.

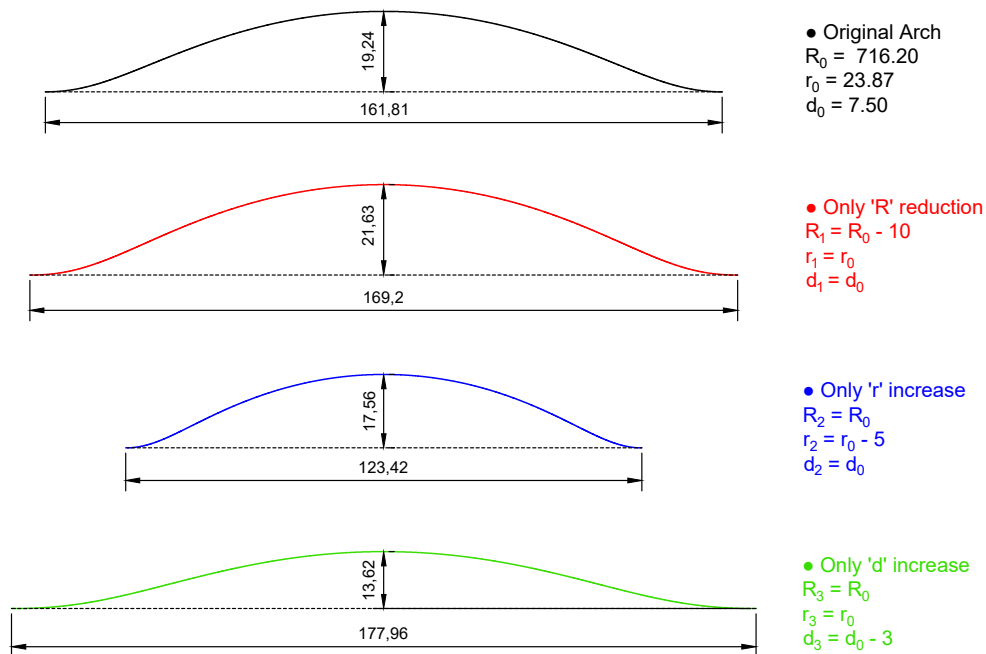


Figure 28: Change in CETA shape according to parameter variation

CETA 특성을 표로 정리하면 Table 4와 같습니다. CHTA와 마찬가지로, 표에서 폭과 높이는 단순히 파라미터를 변경했을 때의 결과이며, 충만도는 폭과 높이가 동일하게 유지되었을 때의 결과입니다.

⁴가운데 점은 아치의 정점

Parameter	Width	Height	Volume
R −	+	+	−
r −	−	−	·
d −	+	−	·

Table 4: Changes in CETA according to parameter variation. +:increase, −:decrease

● R 을 줄이면 충만도가 작아지는 이유

Figure 29는 원이 다른 원에 외접할 때, 기준 원의 반지름(R)을 줄이면 왜 아치의 충만도가 작아지는지 그 원리를 보여줍니다. (CTDA의 기준선인 직선은 반지름이 무한대인 원으로 생각할 수 있습니다.)

그림을 보면, CTDA는 구르는 원이 정점에서 180° 회전해야 끝점에 도달합니다. 반면 CETA는 218° 회전해야 합니다. 이처럼 끝점까지 도달하는 데 필요한 회전각이 늘어나면서, 아치 끝부분은 정점에서 비율적으로 더 멀어집니다. 이는 아치 끝단의 평평한 구간이 길어지는 효과를 낳고, 결과적으로 충만도가 줄어들게 됩니다.

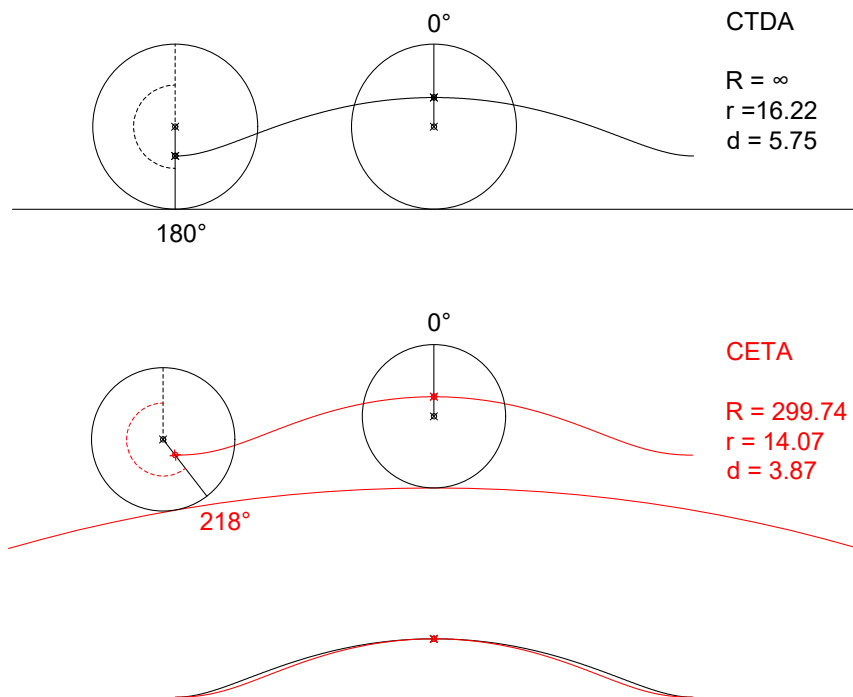


Figure 29: Change in CETA according to the value of R

4 트로코이드 아치의 작성

작성 목표 아치의 충만도가 동일한 폭과 높이를 가진 CTDA의 충만도보다 크면 CHTA를, 더 작으면 CETA를 작성합니다. 충만도가 같다면(확률적으로 매우 드물지만) CTDA를 작성합니다.

4.1 커테이트 트로코이드 아치의 작성

앞장 3.2.1에서 설명했듯이 CTDA는 생성 원리가 단순합니다. 따라서 원하는 아치의 폭과 높이만 알면 즉시 만들 수 있습니다.

예를 들어 폭이 100, 높이가 15인 CTDA를 만든다고 가정해 보겠습니다. (식) 2에 따라 r 과 d 값을 구한 뒤, 이 값들을 수식에 대입하면 곡선을 간단히 얻을 수 있습니다.

$$\begin{cases} r = W/2\pi = 100/(2 * 3.14) = 15.92 \\ d = H/2 = 15/2 = 7.5 \end{cases} \quad (5)$$

4.2 커테이트 하이포트로코이드 아치의 작성

CHTA는 CTDA보다 충만도가 큰 아치를 만드는 데 사용합니다. 그 생성 과정은 CTDA에서 시작됩니다. CTDA는 기준이 되는 큰 원의 반지름(R)이 무한대인 상태(직선)와 같으므로, 이 R 값을 점차 줄여나가며 원하는 아치를 찾는 것입니다. 자세한 방법은 다음과 같습니다.

1. 목표 아치의 충만도가 CTDA보다 큰지 작은지 판별하고, 크다면 CHTA를 생성합니다.
2. R 의 초기값을 결정합니다.⁵ 완성된 CHTA는 대부분 R 값이 $400r$ 을 넘지 않으므로, 넉넉하게 $500r$ (r 값의 500배) 정도에서 시작하는 것이 좋습니다.
3. 설정한 R 초기값에서, 아치의 폭과 높이가 목표치에 도달할 때까지 r 과 d 를 조금씩 늘리며 반복 계산합니다.
4. 폭과 높이가 목표치와 같아지면 충만도를 확인합니다. 만약 충만도가 부족하면 R 값을 줄입니다.
5. 줄어든 R 값으로, 다시 폭과 높이가 목표치에 도달할 때까지 r 과 d 를 늘리며 계산합니다.
6. 폭, 높이, 충만도가 모두 목표치를 만족할 때까지 위 4 ~ 5번 과정을 반복합니다.

위 방법은 계산 과정을 간단히 요약한 것입니다. 실제로는 디지털 양자화 오차나 계산 소요 시간 같은 문제로 인해 훨씬 복잡한 연산이 필요합니다. 반복 계산 시 R 값을 줄여나가는 이유는 충만도를 점차 높이기 위함입니다. R 값이 작아지면 아치의 폭과 높이도 함께 줄어드는데, 이를 목표치로 되돌리기 위해 r 과 d 는 계속 증가시키는 방향으로 조정합니다. 이때, d 를 늘리면 폭과 높이가 모두 증가하지만, r 을 늘리면 높이는 오히려 감소하는 특성이 있습니다. 이 차이를 이용해 r 과 d 를 적절히 조절하며 폭과 높이를 맞춰나가는 것입니다.

⁵무한대에서 시작하지 않고 일정 값에서 시작한다. 무한대로 큰 수를 사용하면 계산시간도 무한히 길어지지 때문

4.3 커테이트 에피트로코이드 아치의 작성

CETA는 CTDA보다 충만도가 작은 아치를 만들 때 사용합니다. 생성 원리는 CHTA와 유사하게 CTDA에서 출발합니다. 즉, 기준 원의 반지름(R)이 무한대인 상태에서 시작하여 R 값을 점차 줄여나가며 원하는 아치를 찾습니다. 자세한 방법은 다음과 같습니다.

1. 목표 아치의 충만도가 CTDA보다 큰지 작은지 판별하고, 작다면 CETA를 생성합니다.
2. R 의 초기값을 결정합니다. (일반적으로 CETA는 CHTA보다 R 값이 조금 더 큼니다.)
3. 설정한 R 초기값에서, 아치의 폭과 높이가 목표치에 도달할 때까지 r 과 d 를 조금씩 줄이며 반복 계산합니다.
4. 폭과 높이가 목표치와 같아지면 충만도를 확인합니다. 만약 충만도가 과하면 R 값을 줄입니다.
5. 줄어든 R 값으로, 다시 폭과 높이가 목표치에 도달할 때까지 r 과 d 를 줄이며 계산합니다.
6. 폭, 높이, 충만도가 모두 목표치를 만족할 때까지 위 4 ~ 5번 과정을 반복합니다.

반복 계산 시 R 값을 줄여나가는 이유는 충만도를 점차 낮추기 위함입니다. CETA는 R 값이 작아지면 폭과 높이가 오히려 늘어나므로, 이를 목표치로 되돌리기 위해 r 과 d 는 계속 감소시키는 방향으로 조정합니다.

4.4 작성할 수 없는 트로코이드 아치

CHTA와 CETA로 조절할 수 있는 충만도에는 한계가 있습니다. 이 때문에 원하는 아치를 만들지 못하는 경우가 생깁니다. 이러한 한계는 다음과 같이 크게 두 가지로 나눌 수 있으며, 두 경우 모두 근사 곡선을 대안으로 사용합니다.

4.4.1 아치가 존재하지 않는 경우

이는 CHT, CET 곡선 자체는 생성되지만, 그 안에서 아치 형태(CHTA, CETA)를 추출할 수 없는 경우입니다. 예를 들어 충만도를 지나치게 높이기 위해 R 값을 너무 많이 줄이면, CHT 곡선은 만들어지지만 아치의 기본 조건을 만족하는 구간이 사라져 버립니다.

CHTA와 CETA는 충만도를 무한정 키우거나 줄일 수 없습니다. 특정 한계점을 넘어서면 곡선이 아치의 기본 조건을 만족하지 못하게 되기 때문입니다. Figure 30처럼 R 값을 너무 많이 줄이면, 생성된 CHT 곡선에 더 이상 아치로 정의할 수 있는 구간이 존재하지 않게 됩니다.

폭과 높이가 고정된 상태에서 트로코이드로 만들 수 있는 최대 충만도의 아치를 'maxCHTA', 최소 충만도의 아치를 'minCETA' 라고 하겠습니다. 실제로 모델 A, B, C의 뒤판 5번 아치는 대부분 maxCHTA보다도 충만도가 큼니다. 이처럼 트로코이드의 한계를 넘어서는 아치를 재현하려면 다음 장에서 설명할 근사 곡선이 필요합니다.

4.4.2 아치가 존재하지만 작성할 수 없는 경우

이론적으로는 CHTA, CETA가 존재하지만, 계산상의 한계로 인해 만들지 못하는 경우입니다. 디지털 계산 과정에서 발생하는 오차, 정밀도, 최적화 오류 등으로 정확한 해를 찾지 못하는 것을 말합니다.

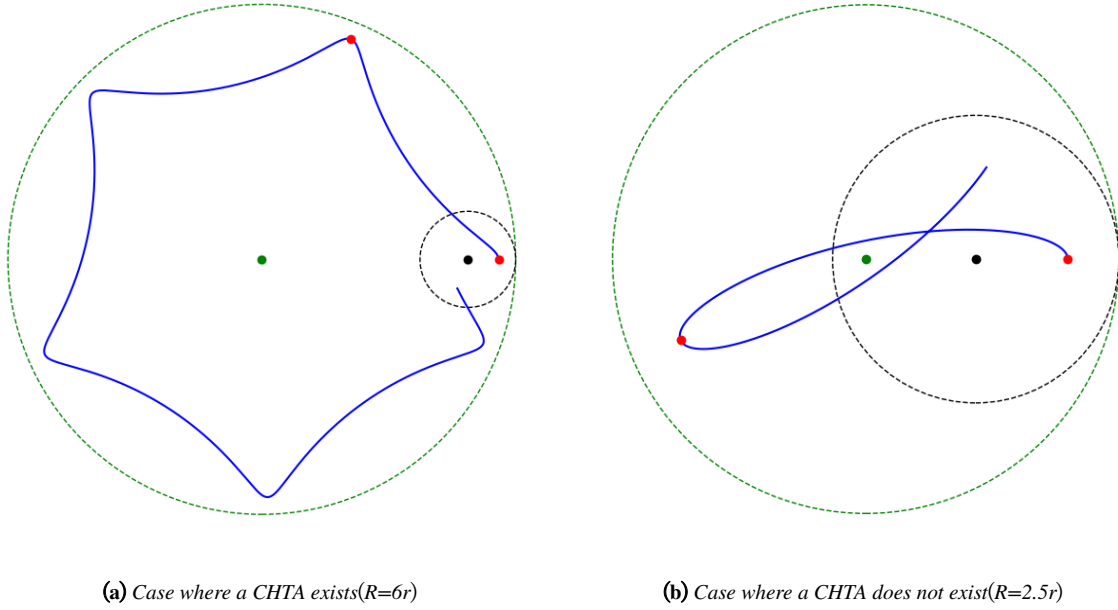


Figure 30: Existence of an arch segment in a CHT curve

TD 곡선은 본래 연속적인 선이지만, 컴퓨터는 이를 수많은 점의 집합(이산값)으로 표현합니다. 만약 우리가 찾는 정확한 해가 이 점과 점 사이에 존재한다면, 컴퓨터는 그 해를 찾지 못하고 계산에 실패할 수 있습니다.

이러한 디지털 양자화 문제 때문에 계산 과정에서는 적절한 타협이 필요합니다. 만약 타협점을 잘못 설정하면 계산에 실패하거나 시간이 기하급수적으로 늘어날 수 있습니다. 따라서 이런 경우에도 근사 곡선을 사용하는 것이 효율적입니다.

5 트로코이드 근사 곡선

목표 아치의 충만도가 CHTA나 CETA로 표현할 수 있는 범위(maxCHTA, minCETA)를 벗어나 아예 존재하지 않거나, 또는 범위 안에 존재하더라도 계산상의 문제로 만들 수 없을 때에는 목표치와 유사한 아치를 대신 만들어 사용할 수밖에 없습니다.

예를 들어, 만들 수 있는 충만도의 최대치가 10인데 12인 아치를 원한다면, 먼저 충만도 10의 아치를 만든 뒤 이를 변환하여 12로 만듭니다. 또 다른 예로, 충만도 7인 아치를 계산하는 데 실패했다면, 대신 충만도 6.9의 아치를 만들어 7이 되도록 변환합니다. Figure 31 처럼, 어떤 이유로든 목표점 Z_1 이나 Z_2 를 지나는 곡선을 만들 수 없을 때는 만들 수 있는 Z_0 를 지나는 곡선을 생성한 뒤, 이를 변환하여 Z_1 이나 Z_2 를 지나도록 만드는 원리입니다.

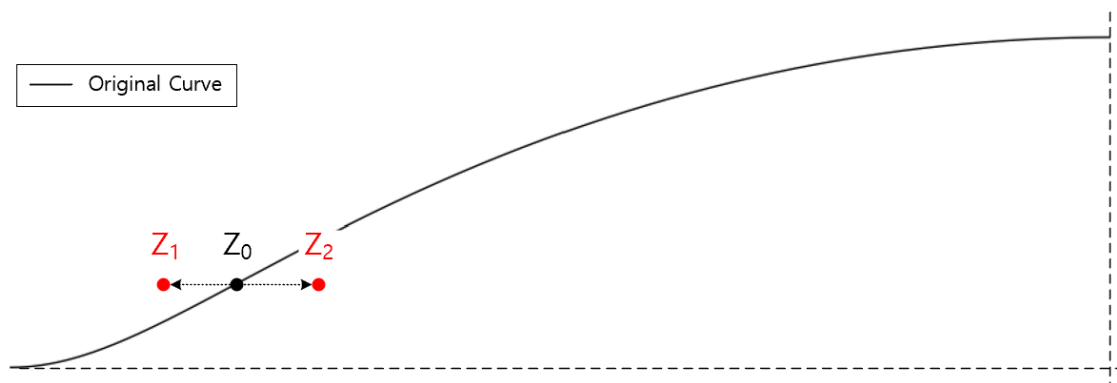


Figure 31: Concept of the approximation curve

이처럼 어떤 문제로 목표 아치를 직접 만들 수 없을 때, 달성 가능한 아치를 먼저 만든 뒤 이를 변환하여 얻은 곡선을 ‘근사 아치’ 또는 ‘근사 곡선(Approximated Arch/Curve)’이라 부르겠습니다. 아래에서는 근사 곡선의 원리와 작성법을 살펴보겠습니다.

참고로 근사 곡선이라는 개념은 1~5번 아치에만 적용됩니다. 6번 아치를 만드는 방법도 이와 유사하지만, CHTA나 CETA와 비슷하게 만드는 것이 목적이 아니므로 ‘근사’라고 부르지는 않습니다.

목표 곡선이 이론적으로 존재하지 않는 경우(예: 충만도가 maxCHTA를 넘는 경우)에 만드는 곡선은 근사보다는 ‘창작’에 가깝습니다. 반면, 곡선은 존재하지만 계산상의 이유로 만들지 못할 때의 결과물은 근사라고 할 수 있습니다. 하지만 이 보고서에서는 편의상 두 경우 모두 근사 곡선으로 통칭하겠습니다.

5.1 근사 곡선의 기본 원리

근사 곡선은 원본이 되는 CHTA나 CETA의 충만도를 조절하여 만듭니다. 그 원리는 원본 곡선을 이루는 수많은 점을 수평으로 이동시키는 것입니다. 이때 원본 곡선이 가진 완만한 S자 형태를 유지하고, 아치의 양 끝점과 정점에서 접선 기울기 ‘0’을 만족해야 합니다. 이를 위해서는 곡선의 각 지점마다 서로 다른 이동량을 적용해야 합니다.

예를 들어, 아치의 정점과 끝점은 움직이지 않아야 합니다. 그리고 중앙부로 갈수록 이동량을 늘리고 양 끝으로 갈수록

이동량을 줄여야만 전체적인 아치 모양을 유지할 수 있습니다. 이처럼 각 지점의 수평 이동량을 결정하려면 일정한 규칙, 즉 패턴이 필요합니다.

Figure 32은 점들의 수평 이동 패턴을 설명합니다. (a)는 충만도를 키우는 경우, (b)는 충만도를 줄이는 경우입니다.

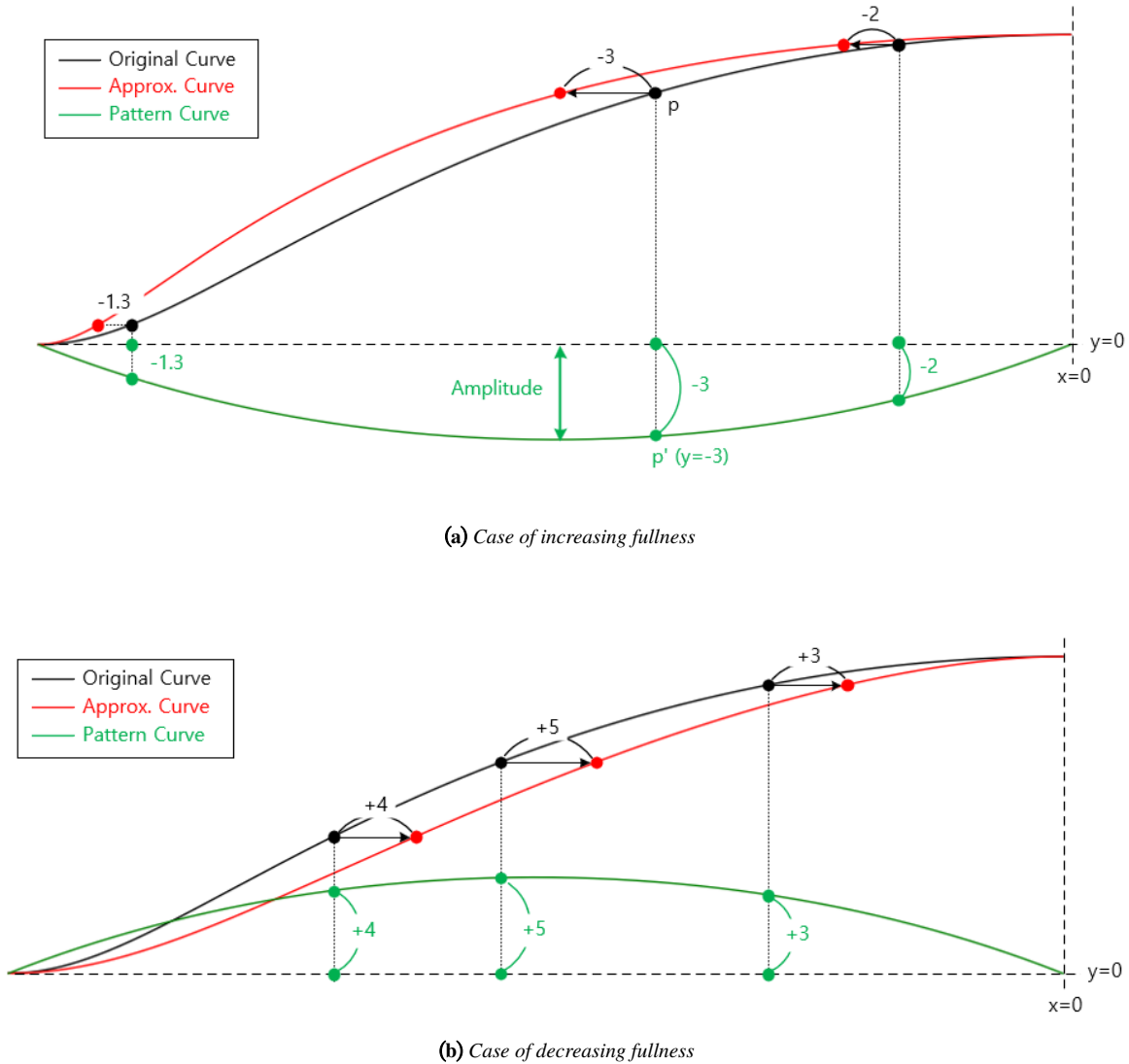


Figure 32: Principle of creating an approximation curve using a pattern curve

원본 아치(검은색)의 정점과 끝점은 고정하고 중앙부만 이동시켜야 합니다. 이때 이동량은 중앙으로 갈수록 커지고 양 끝으로 갈수록 줄어들어야 합니다. 이러한 규칙을 나타내는 패턴은 부드러운 곡선 형태여야 합니다. 또한 이 패턴 곡선의 양 끝은 원본 아치의 정점 및 끝점과 x 축 위치가 같아야 하며, y 값은 0이어야 합니다.

이러한 이동 패턴을 나타내는 곡선을 ‘변환 패턴 곡선(Transformation pattern curve)’ 또는 줄여서 ‘패턴 곡선(Pattern curve)’이라 부르겠습니다. 패턴 곡선의 모양은 최종적인 근사 곡선의 모양을, 패턴 곡선의 진폭(높이)은 충만도의 변화량을 결정합니다. 즉, 진폭이 클수록 각 점의 이동량이 커져 충만도 변화 역시 커집니다.

패턴 곡선은 원본 아치의 각 점을 수평으로 얼마나 이동시킬지 알려주는 역할을 합니다. 예를 들어 그림 (a)에서 원본 아치의 한 점 p 를 얼마나 이동해야 하는지 알려면, p 와 x 축 위치가 같은 패턴 곡선 위의 점 p' 을 찾으면 됩니다. 만약 p' 의 y 값이 -3 이라면, 점 p 를 x 축 방향으로 -3 만큼, 즉 왼쪽으로 3만큼 이동시키면 됩니다. 이렇게 원본 아치의 모든 점을 패턴 곡선의 y 값을 참고해 수평 이동시키면 새로운 근사 곡선이 만들어집니다.

패턴 곡선이 위로 볼록한지 아래로 볼록한지에 따라 아치의 충만도가 커지거나 작아집니다. 위 그림은 아치의 왼쪽 절반을 예로 들고 있습니다. 이 경우, 점들을 왼쪽으로 이동시키면 충만도가 증가하고, 오른쪽으로 이동시키면 감소합니다. 따라서 패턴 곡선이 아래로 볼록하면($-y$ 값) 충만도가 증가하고, 위로 볼록하면($+y$ 값) 충만도가 감소합니다. 아치의 오른쪽 절반을 변환할 때는 이 방향이 반대가 됩니다.

그렇다면 어떤 곡선을 패턴 곡선으로 사용해야 할까요? 근사 곡선의 목적은 원본 트로코이드 아치의 형태는 최대한 유지하면서 충만도만 바꾸는 것입니다. 따라서 어떤 패턴 곡선으로 만든 근사 곡선이, 목표 충만도와 동일한(실제로 존재하는) 트로코이드 아치와 완벽하게 일치한다면, 그 패턴 곡선이 가장 이상적이라고 할 수 있습니다.

패턴 곡선 후보로는 원호, 타원, 카테너리 등 다양한 곡선을 생각해 볼 수 있습니다. 여러 곡선을 시험해 본 결과, 작은 차이들이 있을 뿐 이상적인 곡선은 찾지 못했습니다. 그중에서 가장 결과가 좋았던 것은 카테너리(Catenary curve) 곡선이었습니다. 하지만 카테너리 곡선만으로는 만족스러운 근사 곡선을 얻기 어려워, 이를 기본으로 하되 약간의 수정을 거쳐 최종 패턴 곡선을 만들기로 했습니다.

앞으로 편의상, CHTA를 원본으로 하여 만든 근사 곡선은 nCHTAce, CETA를 원본으로 한 경우는 nCETAice, CTDA를 원본으로 한 경우는 CTDAce 또는 CTDAice로 표기하겠습니다. (부록의 줄임표기 참고)

5.2 패턴 곡선의 작성

패턴 곡선으로는 카테너리 곡선을 사용합니다. 이 곡선의 모양을 조금씩 수정하면서 만들어지는 근사 곡선을 관찰하는 방식으로 최적의 패턴을 찾습니다.

먼저 아치의 폭과 높이가 모두 같다는 조건 아래, 다음 네 가지 곡선을 비교합니다.

- 원본 곡선 A : CTDA
- 목표 곡선 B : 목표 충만도 제어점 Z 를 지나는 CHTA
- 패턴 곡선 C : 근사 곡선 D를 만들기 위한 카테너리 곡선
- 근사 곡선 D : 원본 곡선 A를 패턴 곡선 C로 변환하여, 충만도 제어점 Z 를 지나도록 만든 결과 곡선

이 과정은 근사 곡선(D)이 목표 곡선(B)과 얼마나 비슷한지 확인하기 위함입니다. 만약 B와 D가 완전히 겹친다면, 변환에 사용된 패턴 곡선은 이상적이라고 할 수 있습니다. 일치하지 않는다면 그 차이를 보고 패턴 곡선을 어떻게 수정해야 할지 판단할 수 있습니다. Figure 33은 이 네 가지 곡선을 함께 보여줍니다.

그림에서 근사 곡선(붉은색)은 충만도 제어점 Z 를 기준으로, 아치 끝단 쪽은 충만도가 부족하고 정점 쪽은 과한 모습을 보입니다. 이는 곧 패턴 곡선(녹색)이 아치 끝단 쪽에서는 충분한 변환을 주지 못하고, 정점 쪽에서는 과한

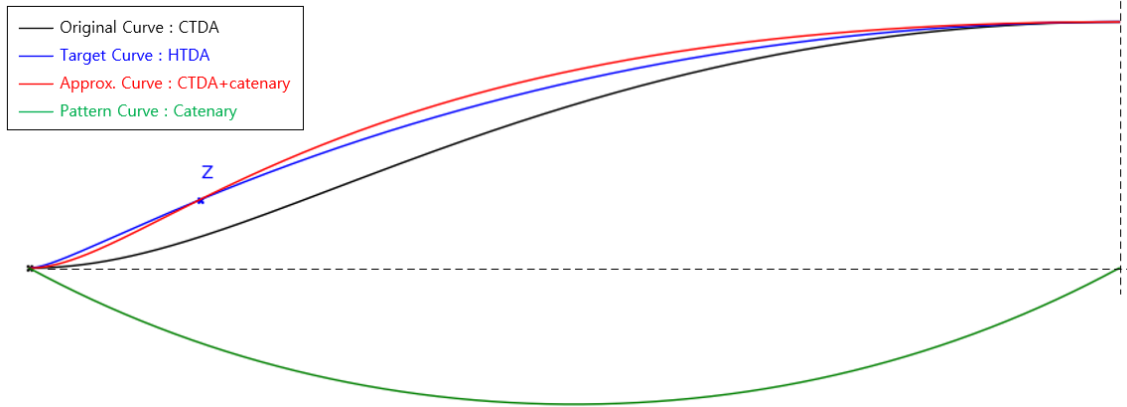


Figure 33: Approximation curve using a catenary curve

변환을 준다는 의미입니다. 이 문제를 해결하려면, 현재 아래로 볼록한 카테너리 곡선의 정점을 아치 끝단 쪽으로 이동시켜야 합니다. 이러한 정점 이동은 곡선을 한쪽으로 밀집시키는 것과 같으며, 카테너리 곡선에 지수 함수를 적용하여 구현할 수 있습니다. 지수값이 +이면 곡선이 왼쪽으로, -이면 오른쪽으로 밀집됩니다.

카테너리 곡선에 지수 함수를 적용하는 방법은 다음과 같습니다. 먼저 x 축 자체에 지수 함수를 적용하여 축을 왜곡합니다(늘리거나 줄입니다). 그 다음, 왜곡된 x 축 위에 원래의 카테너리 곡선을 그린 뒤, 마지막으로 x 축을 다시 원래대로 복구합니다. (-Figure 34-)

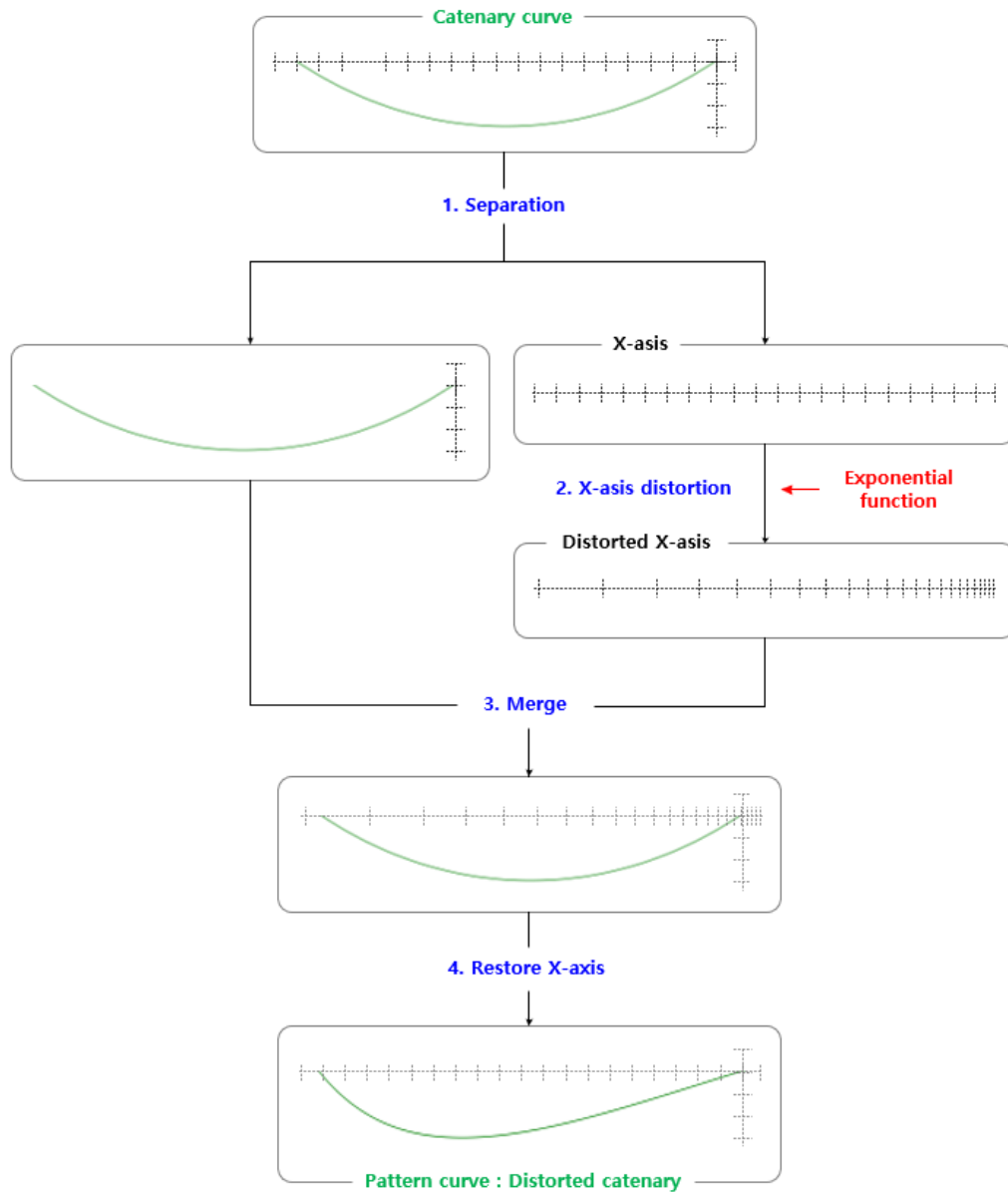


Figure 34: Method of applying an exponential function to a catenary curve

위 방법으로 카테너리 곡선의 정점 위치를 이동시켜(한쪽으로 밀집시켜) 다시 만든 근사 곡선은 Figure 35처럼 바뀝니다.

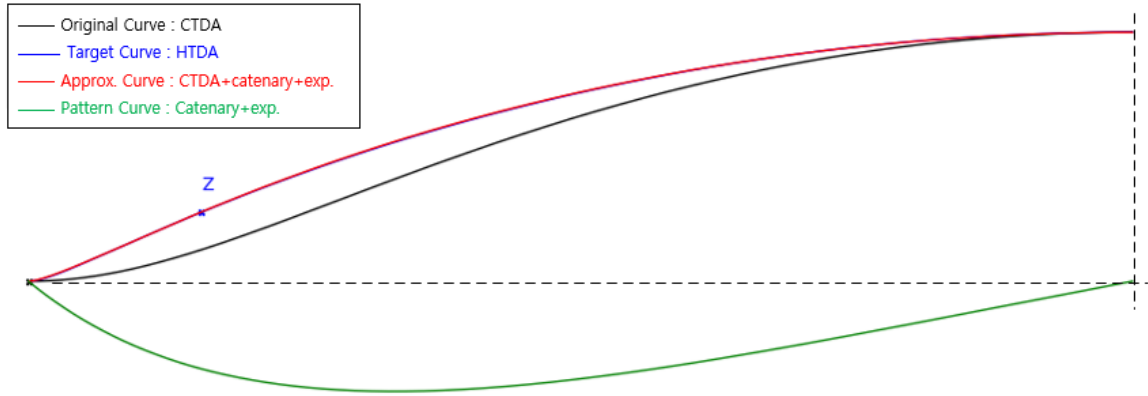


Figure 35: Approximation curve using an exponentially distorted catenary curve

그림을 보면 목표 곡선(파란색)과 근사 곡선(붉은색)이 거의 일치하는 것을 알 수 있습니다. 이때 사용된 지수값은 현재 아치의 폭과 높이에 가장 적합한 값입니다. 아치의 폭과 높이가 같다면, 충만도의 크기와 상관없이 이 최적의 지수값을 동일하게 사용할 수 있습니다. 단, 이 값은 충만도를 키우는 경우에만 해당합니다. 충만도를 줄이는 경우에는 패턴 곡선 정점의 이동 방향이 반대이므로, 다른 부호와 다른 크기의 최적 지수값을 별도로 찾아야 합니다.

최적의 지수값을 찾는 일은 컴퓨터의 반복 계산을 통해 이루어집니다. 근사 곡선과 목표 곡선의 차이를 오차 면적으로 계산하고, 이 면적이 가장 작아지는 지수값을 선택하는 것입니다.

아래는 이 과정에 대한 수학적 설명입니다.

카테너리 곡선의 정의와 일반식은 다음과 같습니다.

Definition 5.1. 카테너리 곡선(Catenary curve)

양 끝이 고정된, 유연하고 늘어나지 않으며 밀도가 균일한 줄이 중력에 의해 자연스럽게 아래로 처졌을 때 생기는 곡선

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (6)$$

여기서 a 는 곡선의 최저점에서 x 축까지의 거리를 나타내는 상수로, 곡선의 폭과 모양을 결정합니다. 본 보고서에서는 특정 구간(x_s, x_e)의 양 끝점 이동량을 0으로 고정하고 진폭(A)을 조절할 수 있도록, 아래와 같이 식을 변형하여 사용합니다.

$$y = A \left[\cosh\left(\frac{x' - x_c}{w}\right) - \cosh(1) \right] \quad (7)$$

여기서 x_c 는 곡선의 중심, w 는 폭을 결정하며, x' 는 함수에 입력되는 최종 좌표입니다.

곡선을 비대칭으로 만들기 위해, 입력 좌표 x' 는 원본 x 좌표 x_o 지수 함수로 왜곡하여 생성합니다. 이 과정은 x_o 를 $[0, 1]$ 범위로 정규화한 뒤 적용됩니다.

$$x' = \left(\frac{e^{\left(\frac{x_o - x_s}{L}\right) \cdot \text{expo}} - 1}{e^{\text{expo}} - 1} \right) \cdot L + x_s, \text{ where } L = x_e - x_s \quad (8)$$

위 식들을 결합한 최종적인 ‘지수 왜곡 카테너리 함수’는 다음과 같습니다.

$$y(x_o) = A \cdot \left(\cosh \left(\frac{x' - x_c}{w} \right) - \cosh(1) \right) \quad (9)$$

x_o : 원본 X 좌표

A : 곡선의 전체적인 진폭을 결정하는 계수

x' : 함수에 입력되는 최종 좌표

x_s, x_e : 곡선의 x축 범위

expo : 지수 왜곡의 강도와 방향을 결정하는 계수

x_c, w : 카테너리 곡선의 중심 및 폭 계수 ($x_c = \frac{x_s + x_e}{2}, w = \frac{L}{2}$)

6 트로코이드 근사 곡선의 작성

근사 곡선은 다음 두 가지 경우로 나누어 작성합니다. 첫째는 목표 아치가 이론적으로 존재하지 않는 경우이고, 둘째는 존재하지만 계산상 문제로 만들 수 없는 경우입니다.

6.1 아치가 존재하지 않는 경우

작성 순서는 다음과 같습니다.

1. 목표 아치와 폭, 높이가 같은 CTDA와 maxCHTA(또는 minCETA)를 각각 생성합니다.
2. 패턴 곡선의 지수값과 진폭을 조절하여, CTDA를 변환한 근사 곡선이 maxCHTA(또는 minCETA)와 가장 유사해지는 최적의 지수값을 찾습니다.
3. 앞서 찾은 최적의 지수값을 패턴 곡선에 적용합니다. 그 다음, 진폭을 다시 조정하여 maxCHTA(또는 minCETA)를 변환함으로써 최종 근사 곡선인 nCHTAce(또는 nCETAice)를 완성합니다.

(※ 근사 곡선의 오차를 줄이려면 다음 사항에 유의해야 합니다. 지수값을 결정할 때는 두 곡선이 만드는 폐곡선의 면적(오차 면적)을 계산하고, 이 면적이 가장 작아지는 지수값을 선택합니다. 그러나 오차 면적이 작더라도 곡선의 전체적인 모양이 다를 수 있습니다. 따라서 표준편차를 함께 비교하여, 오차 면적과 표준편차 모두 균형 있게 작은 값을 선택해야 합니다.)

6.2 아치가 존재하지만 계산상의 이유로 작성할 수 없는 경우

작성 순서는 다음과 같습니다.

1. 목표 아치와 폭, 높이가 같은 CTDA와 maxCHTA(또는 minCETA)를 각각 생성합니다.
2. 패턴 곡선의 지수값을 조절하여, CTDA를 변환한 근사 곡선이 maxCHTA(또는 minCETA)와 가장 유사해지는 최적의 지수값을 찾습니다.
3. 목표 곡선과 충만도가 가장 가까우면서 계산 가능한 nCHTA(또는 nCETA)를 원본 곡선으로 생성합니다.
4. 앞서 찾은 최적의 지수값을 패턴 곡선에 적용합니다. 그 다음, 진폭을 조절하여 3번에서 만든 원본 곡선(nCHTA)을 변환한 근사 곡선이 목표 충만도 제어점을 지나도록 만듭니다.
5. 위 과정에서 찾은 지수값과 진폭을 이용해 nCHTA(또는 nCETA)를 변환하여 최종 근사 곡선인 nCHTAce(또는 nCETAice)를 완성합니다.

만약 목표 곡선이 CTDA와 매우 유사하다면, 파라미터 R 값이 매우 커져 계산에 큰 부하(시간, 정밀도 등)가 걸릴 수 있습니다. 따라서 이 경우에도 근사 곡선을 사용하는 것이 효율적입니다. 이때는 원본 곡선으로 nCHTA(또는 nCETA) 대신 CTDA를 사용하며, 생성된 근사 곡선은 CTDAce(또는 CTDAice)로 표기합니다.

(※ 근사 곡선의 오차를 줄이려면 다음 사항에 유의해야 합니다. 첫째, 패턴 곡선의 지수값을 찾을 때는 변위가 가장 큰 경우를 기준으로 삼아야 합니다. 즉, 원본 곡선은 CTDA로, 목표 곡선은 maxCHTA(또는 minCETA)로 설정하여 계산합니다. 둘째, 최종 근사 곡선을 만들 때는 원본 아치로 목표 충만도 제어점에 가장 가깝고 계산 가능한 CHTA(또는 CETA)를 사용해야 합니다. 셋째, 오차 면적과 표준편차를 함께 고려하여 최적의 지수값을 선택해야 합니다.)

7 6번 아치

1~5 아치의 폭은 주로 플레이트의 폭에 따라 정해지지만, 그 높이는 6번 아치의 모양에 의해 결정됩니다. 따라서 6번 아치는 재현 과정에서 가장 중요한 단계라고 할 수 있습니다.

6번 아치는 다른 아치들보다 충만도가 크고, 정점 부근이 평탄하게 길게 이어지는 모양을 가집니다. 이러한 특징 때문에 일반적인 CHTA로는 재현이 불가능합니다. 따라서 별도의 패턴 곡선을 이용해 CTDA를 변형하여 만들어야 합니다.

7.1 6번 아치 작성의 원리

6번 아치는 다른 아치와 모양이 다르므로, 형태를 결정하려면 추가 기준점이 필요합니다. 1~5번 아치는 정점·양 끝점·충만도 제어점까지 총 3개의 점으로 정의했지만, 6번 아치는 최소 2개 이상의 기준점이 더 필요합니다. 또한 1~5번 아치는 좌우 대칭이지만 6번 아치는 비대칭이므로, 아치 정점을 기준으로 상단부와 하단부를 나누어 만들어야 합니다.⁶

6번 아치의 모양을 결정하는 추가 기준점으로는, 등고선의 위치를 나타내는 점('등고점') 중 첫 번째와 네 번째 점을 사용합니다. 재현 곡선은 충만도 제어점 Z 를 반드시 지나가야 합니다. 하지만 Z 를 기준으로 아치 끝단 쪽과 정점 쪽의 부분적인 충만도는 패턴 곡선의 모양에 따라 달라질 수 있습니다. 따라서 이 두 부분의 충만도를 확인하고 조절하기 위해 첫 번째와 네 번째 등고점을 추가 기준점으로 사용하는 것입니다.

이상적으로는 재현 곡선이 모든 등고점과 1~5번 아치의 위치점을 통과해야 합니다. 그러나 앞서 보았듯 모델의 등고점 위치에는 오차가 있어 표면이 고르지 않습니다. 따라서 위치상 가장 적합한 몇 개의 점을 기준점으로 선택하는 것이 합리적입니다. 충만도 제어점(두 번째 등고점)은 반드시 통과해야 하므로, 그 양쪽에 기준점을 하나씩 배치합니다. 아치 끝단 쪽에는 첫 번째 등고점을, 정점 쪽에서는 패턴 곡선의 모양 변화에 가장 민감하게 반응하는 네 번째 등고점을 기준점으로 선택합니다.

재현 곡선은 아치 끝점과 점 Z , 아치 정점은 반드시 통과합니다. 이 상태에서 첫 번째와 네 번째 등고점도 통과하는지 확인합니다. 만약 곡선이 등고점 위로 지나가면 충만도가 과한 것이고, 아래로 지나가면 부족한 것입니다. 이 결과를 바탕으로 패턴 곡선의 모양을 조정하여, 재현 곡선이 이 두 등고점도 통과하도록 만듭니다.

이처럼 6번 아치의 모양을 결정하기 위해 추가된 두 기준점을 '모양 제어점(Shape control point)'이라 부르겠습니다. 충만도 제어점을 기준으로 아치 끝단 쪽에 있는 것을 하단 모양 제어점(Shape control point-bottom), 정점 쪽에 있는 것을 상단 모양 제어점(Shape control point-top)으로 정의합니다. 따라서 하단 모양 제어점은 첫 번째 등고점, 상단 모양 제어점은 네 번째 등고점이 됩니다. 하지만 충만도 제어점과 마찬가지로, 등고점을 모양 제어점으로 사용한 것은 단지 편의를 위해서입니다. 재현 대상 아치 위의 점이라면 어떤 점이든 제어점으로 사용할 수 있습니다. 우리가 등고점의 위치 값을 미리 알고 있기 때문에 선택했을 뿐, 상단 모양 제어점으로 네 번째 대신 다섯 번째나 여섯 번째 등고점을 사용해도 무방합니다.

⁶모델의 아치는 좌우대칭이 아니므로, 본서에서는 1~5 번째 아치에 대해서도 아치의 좌우를 구분하여 각각 재현합니다.

6번 아치를 위한 패턴 곡선은 3차 다항 곡선과 지수 곡선 및 카테너리 곡선을 혼합하여 만듭니다. 카테너리 곡선은 전체적인 충만도를 조절하여 재현 곡선이 충만도 제어점을 통과하게 합니다. 3차 다항 곡선은 아치의 전체적인 모양을 조정하며, 지수 곡선은 모양을 더 세밀하게 조정하는 역할을 합니다. 따라서 아치를 재현할 때는 이 세 곡선의 파라미터(진폭, 지수값 등)를 적절히 조합해야 합니다.

7.2 패턴 곡선의 작성

3차 다항 곡선은 카테너리 곡선과 비슷하지만 한쪽이 더 평평한 비대칭 형태를 가집니다. 마치 손가락처럼 한쪽은 오목하고(스폰 부분), 반대쪽은 길게 뻗은 모양(손잡이 부분)입니다. 이 손잡이의 길이와 위치(왼쪽/오른쪽), 그리고 곡선의 진폭에 따라 재현될 아치의 모습이 달라집니다. 예를 들어 왼쪽 절반의 아치를 생성하는 경우에, 손잡이가 왼쪽에 있다면, 재현 아치는 끝단부의 충만도는 작아지고 정점 쪽으로 갈수록 충만도가 커지는 효과(경사가 급해지는 효과)가 나타납니다. 손잡이의 길이는 3차 다항 곡선에 지수 함수를 적용하여 조절합니다. 즉, 곡선을 왼쪽 또는 오른쪽으로 밀집시키는 것입니다. 지수값이 +이면 왼쪽으로, -이면 오른쪽으로 밀집됩니다. 일반적으로 손잡이는 왼쪽에 두지만, 경우에 따라 오른쪽에 두기도 합니다.

아래는 3차 다항 곡선에 대한 설명입니다.

Definition 7.1. 3차 다항 곡선(Cubic polynomial curve)

변수 x 의 최고차항이 3제곱(x^3)인 $y=ax^3 + bx^2 + cx + d$ 형태로 정의되는 곡선. 최대 두 개의 극값을 가질 수 있어, 단순한 포물선보다 복잡한 S자 형태의 부드러운 곡선을 만들어 낸다.

본 보고서에서 사용하는 3차 다항 곡선의 기본 형태는 다음 수식으로 정의됩니다.

$$y = x^2(x - 1) \quad (10)$$

최종 패턴 곡선은 '지수 함수가 적용된 3차 다항 곡선'과 '카테너리 곡선'을 더해서 만듭니다(Figure 36). 먼저 카테너리 곡선과 3차 다항 곡선을 각각 준비합니다. 그 다음, 3차 다항 곡선의 x 축을 지수 함수로 왜곡하여 모양을 변형하고(손잡이 길이 조절), 이렇게 변형된 3차 다항 곡선을 미리 준비한 카테너리 곡선과 더하면 최종 패턴 곡선이 완성됩니다. (3차 다항 곡선에 지수 함수를 적용하는 방법은 Figure 34를 참고)

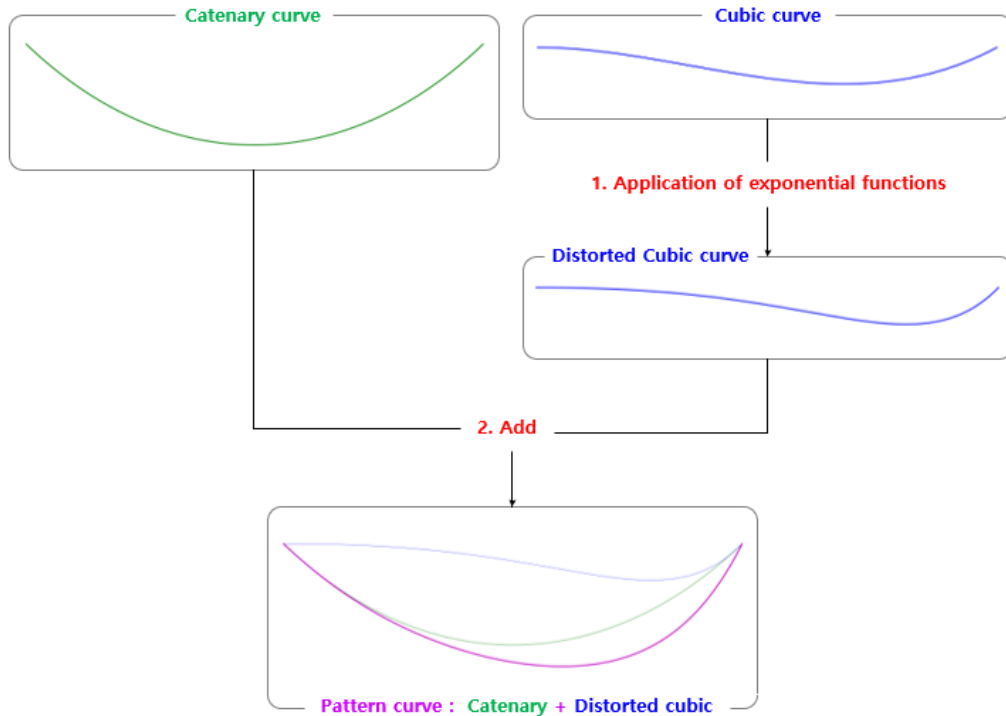


Figure 36: Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve

Figure 37은, 패턴 곡선의 각 요소를 적용할 때마다 재현 곡선이 어떻게 변하는지 보여줍니다.

(※ 예시 그림이므로 각 파라미터는 임의로 설정되었습니다.)

충만도 제어점 Z 를 기준으로 볼 때, (a)는 끝단 쪽의 충만도는 과하고 정점 쪽은 부족하며, (b)는 그 반대입니다. (c)는(a)보다 목표 곡선에 조금 더 근접한 상태입니다. 이처럼 세 가지 함수를 조합하면 재현 곡선의 형태를 자유롭게 조절할 수 있지만, 최적의 파라미터를 찾는 일은 쉽지 않습니다. 먼저 카테너리 곡선의 진폭은 재현 곡선이 충만도 제어점 Z 를 통과할 때까지 반복 계산하여 찾습니다. 그 다음, 3차 다항 곡선의 진폭과 지수 함수의 지수값은 재현 곡선이 첫 번째와 네 번째 등고점을 모두 통과하도록 값을 바꿔가며 반복 계산을 통해 찾아야 합니다.

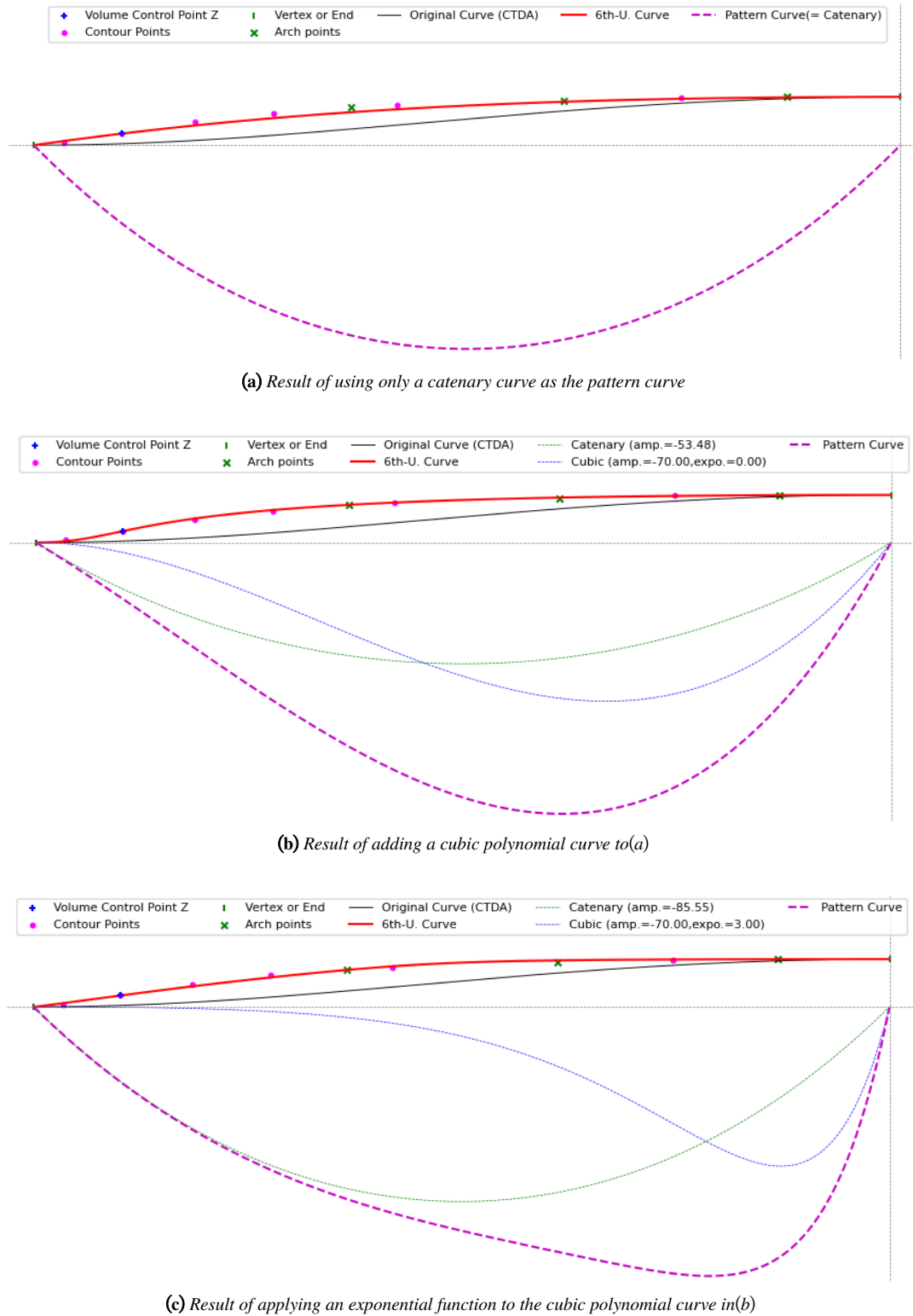


Figure 37: Change in the reconstruction curve according to the combination of pattern curve elements

Figure 38은, 위와 같은 반복 계산을 통해 최적의 파라미터를 찾아 적용한 최종 결과입니다. 앞의 예시 그림들과 비교해 보면, 재현 곡선이 등고점의 위치와 매우 잘 일치하는 것을 확인할 수 있습니다.

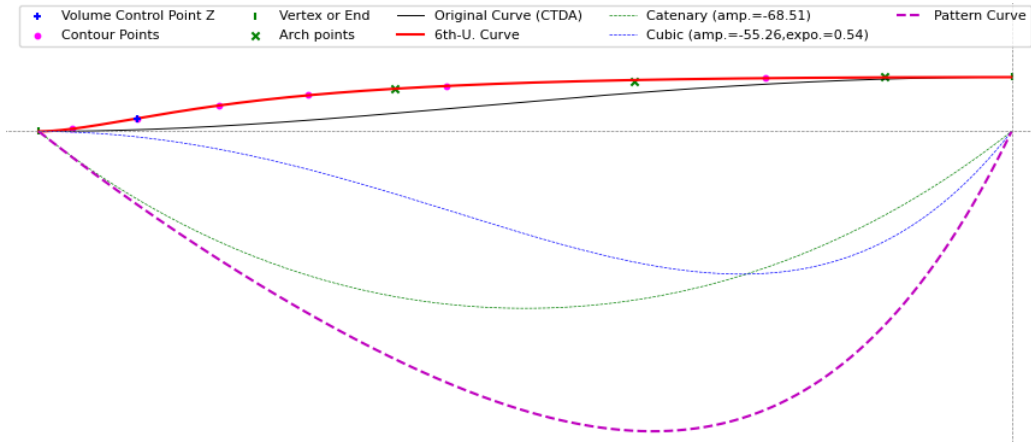


Figure 38: Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve(Optimized)

이처럼 모양 제어점과 충만도 제어점의 위치를 적절히 지정하고, 재현 곡선이 이 점들을 모두 통과하도록 패턴 곡선을 조정하면 다양한 형태의 아치를 정교하게 만들어 낼 수 있습니다.

7.3 6번 아치 작성 순서

6번 아치의 재현 순서는 다음과 같습니다.

1. 충만도 제어점 Z와 상·하단 모양 제어점의 위치를 지정합니다.
2. 재현할 아치와 폭, 높이가 같은 CTDA를 원본 곡선으로 생성합니다.
3. 패턴 곡선에 사용할 카테너리 곡선과 3차 다항 곡선을 준비합니다.
4. 재현 곡선이 충만도 제어점과 상·하단 모양 제어점을 모두 통과하도록, 3차 다항 곡선에 적용할 지수값과 각 곡선(3차 다항, 카테너리)의 진폭을 0부터 조금씩 늘려가며 최적의 값을 찾습니다.
5. 찾아낸 지수값과 두 진폭값을 적용하여 최종 패턴 곡선을 완성합니다.
6. 완성된 패턴 곡선을 이용해 2번에서 만든 CTDA를 변형하여 최종 아치를 생성합니다.

8 스트라디바리 아치의 재현

지금까지 설명한 방법을 사용하여 실제로 모델 A, B, C, D의 아치를 재현합니다. 단, 6번 아치는 특성상 한데 모아 별도로 표시했습니다. 이어지는 Table 6~5에는 재현에 사용된 파라미터 값과 아치 타입 등 관련 정보를 요약했습니다.

1~5번 아치는 앞판과 뒤판, 그리고 좌측(베이스 바 쪽)과 우측(사운드 포스트 쪽)으로 나누어 재현합니다. 우선 CHTA 또는 CETA로 재현을 시도하고, 불가능할 경우에만 패턴 곡선을 이용한 근사 곡선(nCHTAce, nCETAice 등)을 작성합니다. 충만도 제어점 Z의 위치는 모두 두 번째 등고점으로 통일했습니다.

6번 아치는 정점을 기준으로 상단부와 하단부로 나누어 재현하며, 패턴 곡선으로 CTDA를 변형하여 만듭니다(CTDAce). 충만도 제어점 Z는 두 번째 등고점으로, 하단 모양 제어점은 첫 번째 등고점으로 통일했습니다. 상단 모양 제어점의 경우, 모델 A, B, C는 5, 6, 7번째 등고점 중 가장 적합한 점을 선택했고, 모델 D는 4번째 등고점을 사용했습니다.

6번 아치를 재현할 때 가장 큰 어려움은, 3개의 제어점(충만도 제어점, 상·하단 모양 제어점)을 모두 통과하는 곡선을 만들어야 한다는 것입니다. 만약 이 점들이 부드러운 곡선 위에 있지 않고 제각기 흩어져 있다면, 모든 점을 통과하는 매끄러운 재현 곡선을 만드는 것은 불가능합니다. 예를 들어 모양 제어점 하나만 유독 튀어나와 있는 경우입니다. 이처럼 기준점들의 위치가 고르지 않으면, 모든 점을 통과하는 매끄러운 아치는 존재할 수 없습니다. 설령 모든 점을 지나는 곡선을 억지로 만든다 해도, 그것은 우리가 원하는 부드러운 아치가 아닌 찌그러진 모양이 될 뿐입니다.

특히 모델 A, B, C는 앞서 확인했듯 아치 표면이 울퉁불퉁합니다. 이런 상태에서 단순히 첫 번째, 두 번째, 네 번째 등고점을 각 제어점으로 지정하면 재현 자체가 거의 불가능합니다. 따라서 원본 곡선이 고르지 않을 때는 일부 조정이 필요합니다.

이때, 충만도 제어점(두 번째 등고점)의 위치는 정확하다고 가정합니다. 대신 두 모양 제어점은 재현 곡선이 원본과 가장 잘 일치하도록 신중하게 선택해야 합니다. 상단 모양 제어점은 3~7번째 등고점 중에서 가장 자연스러운 곡선을 만들 수 있는 점을 고릅니다. 하단 모양 제어점은 우선 첫 번째 등고점으로 시도해 보고, 곡선 생성이 불가능하면 높이를 조금씩 조정하여 곡선을 만들 수 있는 최적의 위치를 찾아야 합니다.

Figure 39~42는 재현된 6번 아치와 관련 점들을 함께 표시한 그림입니다. 모델 A의 앞판 상단부를 예로 들어보겠습니다(Figure 39). 이 아치는 두 번째 등고점(충만도 제어점), 첫 번째 등고점(하단 모양 제어점), 여섯 번째 등고점(상단 모양 제어점)을 기준으로 재현했습니다. 그림을 보면, 재현된 곡선에 비해 네 번째 등고점과 첫 번째 아치 지점이 위로 솟아 있는 것을 알 수 있습니다. 눈으로 보아도 두 점의 위치가 상식적이지 않습니다. 만약 여섯 번째 대신 솟아 있는 네 번째 등고점을 상단 모양 제어점으로 사용했다면, 재현 곡선의 상단부가 전체적으로 부풀어 올라 원본과의 차이가 더 커졌을 것입니다.

모델 B의 뒤판 하단부 아치도 좋은 예입니다(Figure 40). 처음에는 2, 1, 7번 등고점을 각 제어점으로 사용했으나 곡선 생성에 실패했습니다. 첫 번째 등고점의 위치가 너무 높았기 때문입니다. 그래서 하단 모양 제어점의 높이를 조금씩 낮추며 반복 계산한 결과, 0.4mm를 낮춘 후에야 비로소 곡선을 만들 수 있었습니다. 그림을 보면 재현 곡선이 첫 번째 등고점의 아래를 지나가는 것을 확인할 수 있습니다. 동시에 세 번째와 네 번째 등고점은 재현 곡선보다 한참

아래에 있습니다. 이는 충만도 제어점의 위치가 잘못되었거나, 아니면 3, 4번 등고점의 위치가 잘못되었을 수 있다는 의미입니다. 하지만 어느 쪽이 맞는지는 현재로서는 알 수 없으므로, 충만도 제어점은 두 번째 등고점으로 한다는 원칙에 따라 재현을 진행했습니다.

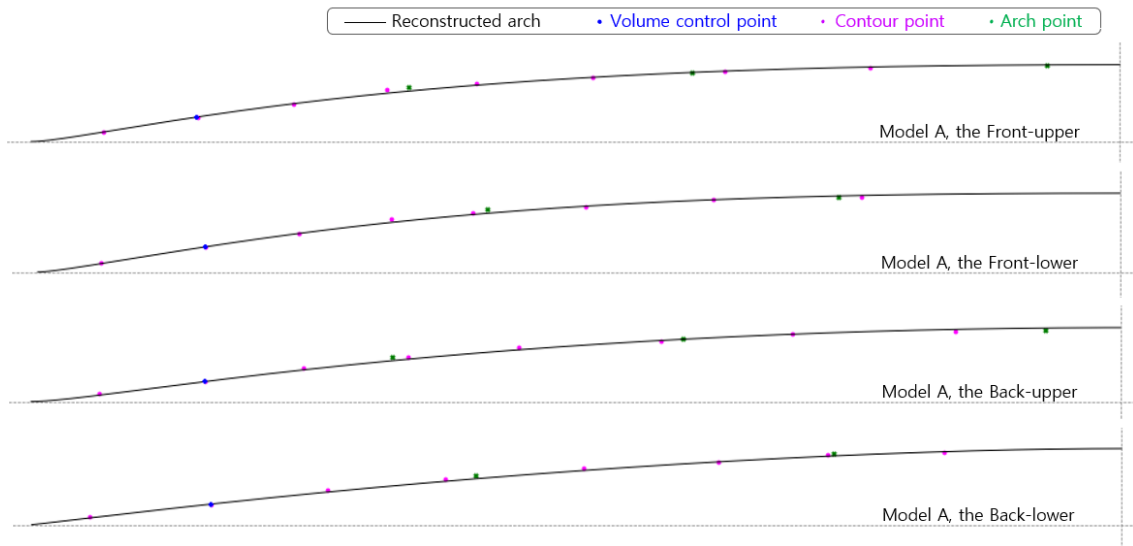


Figure 39: Model A, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

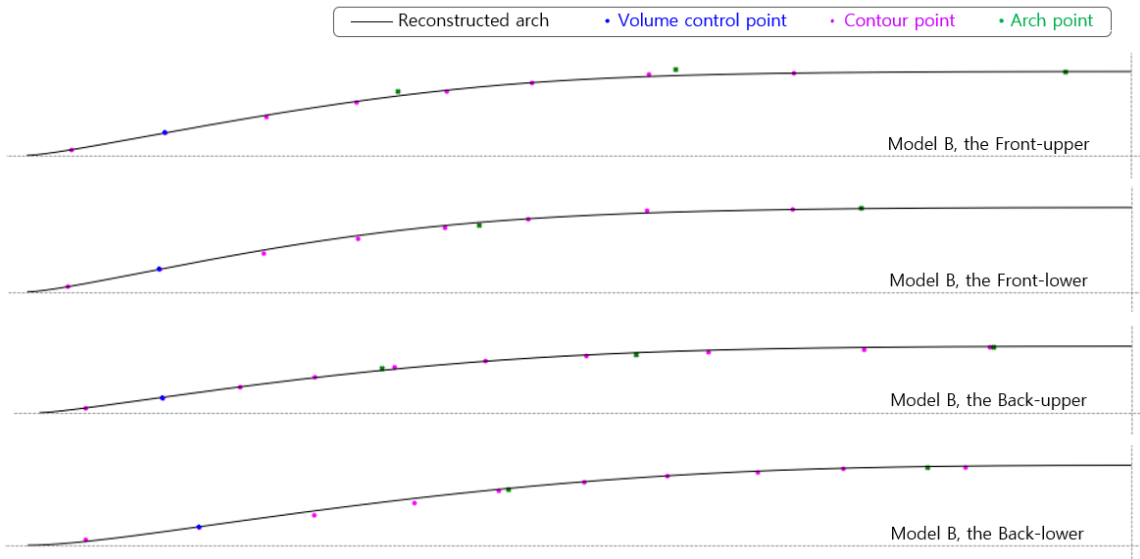


Figure 40: Model B, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

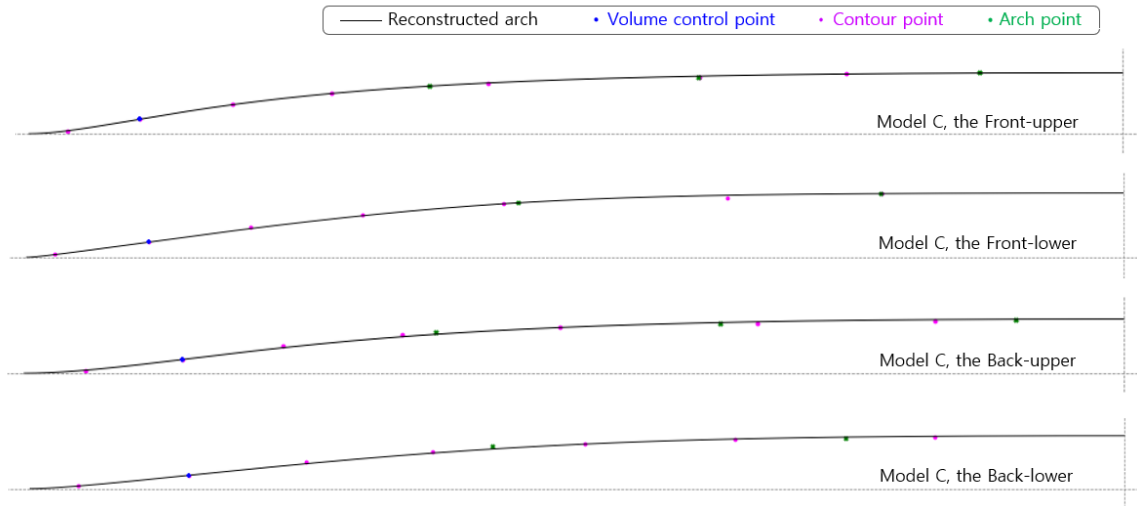


Figure 41: *Model C, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)*

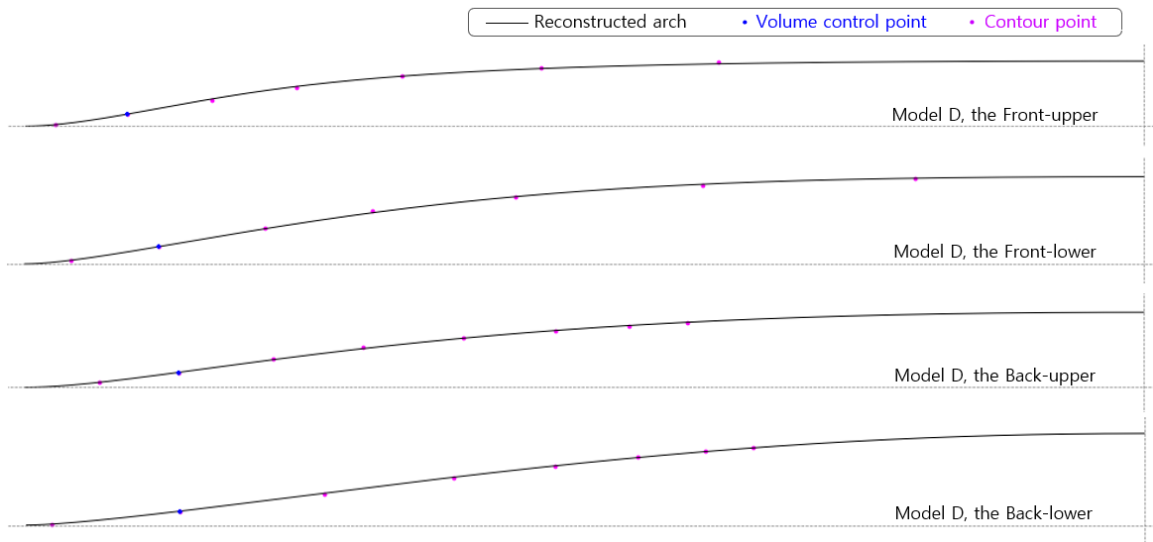


Figure 42: *Model D, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)*

8.1 재현 결과

Figure 43~54는 모든 모델 아치들의 최종 재현 결과입니다.



Figure 43: *Model A, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*



Figure 44: *Model A, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*

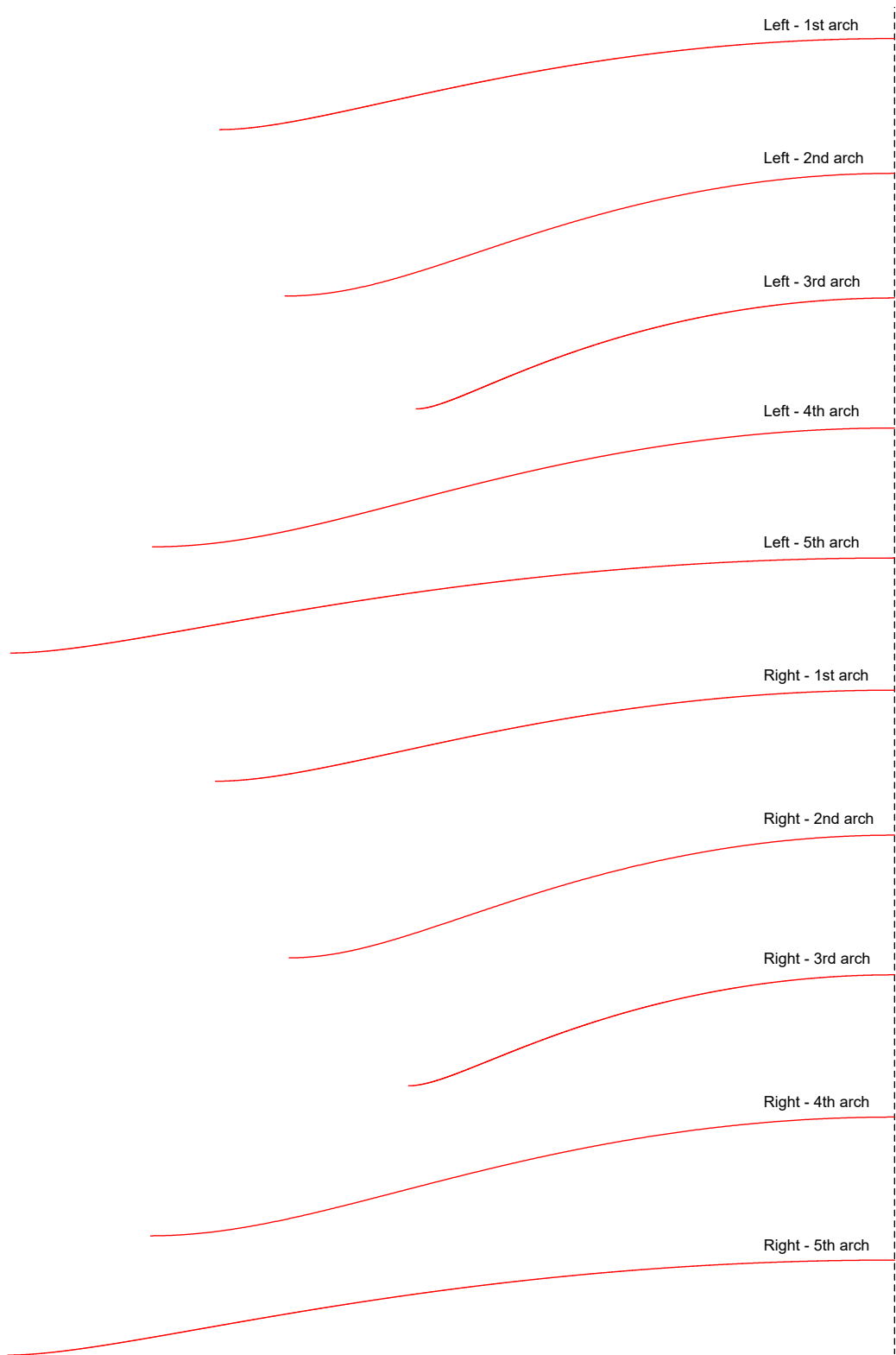


Figure 45: *Model B, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*

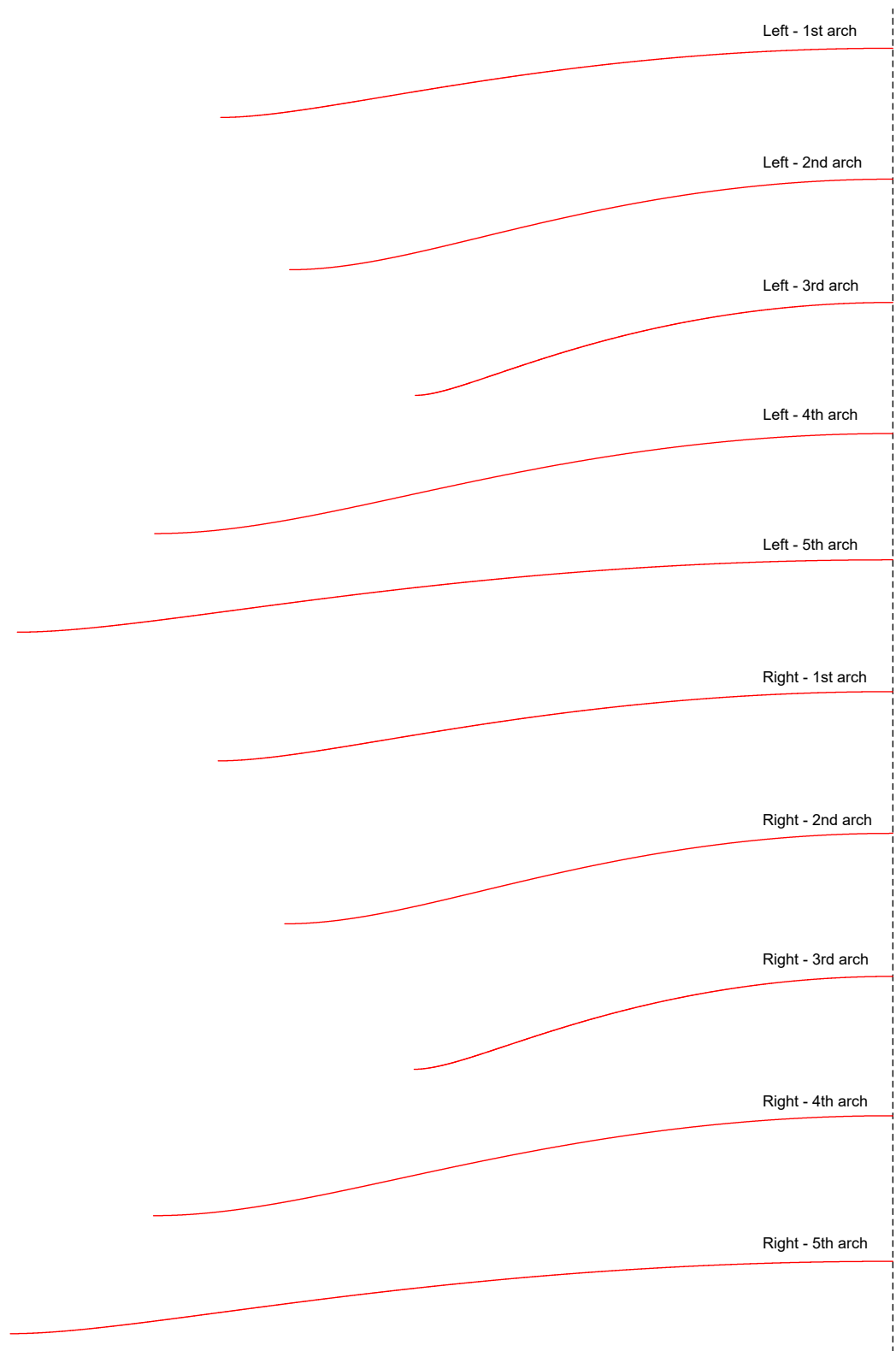


Figure 46: *Model B, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*



Figure 47: *Model C, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*



Figure 48: *Model C, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*

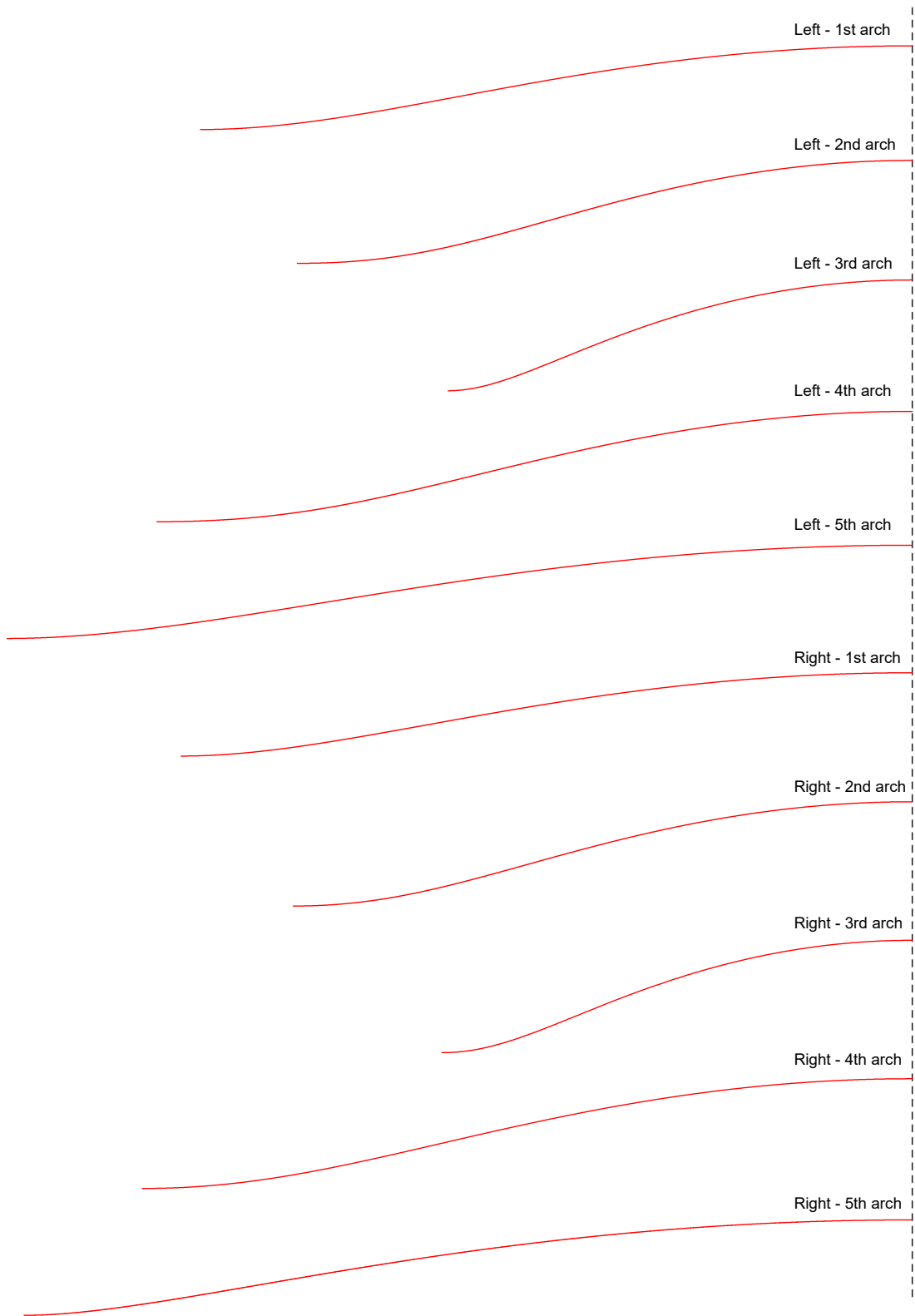


Figure 49: *Model D, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*

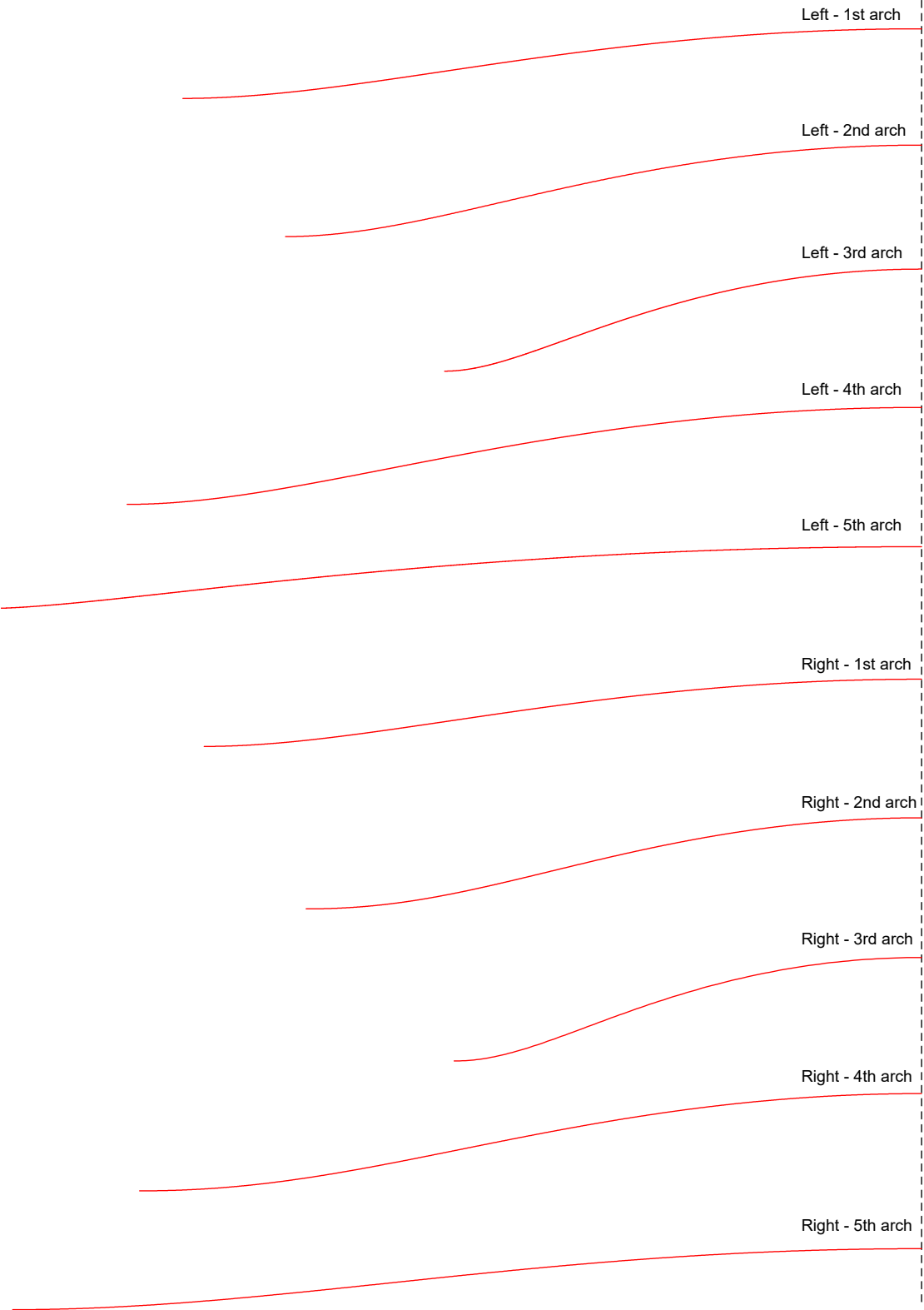


Figure 50: *Model D, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)*

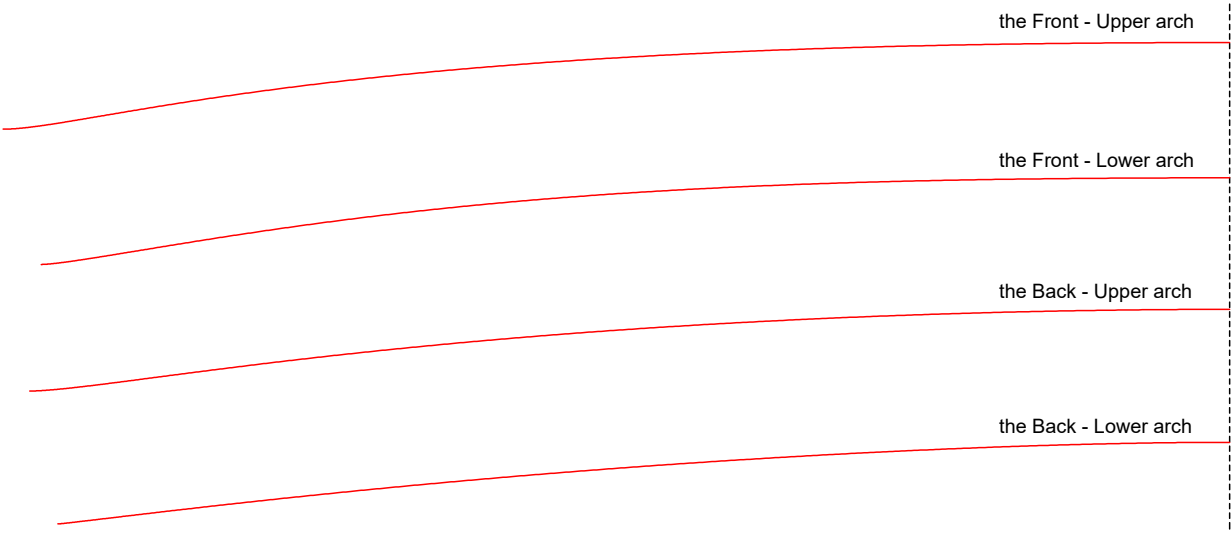


Figure 51: *Model A, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)*

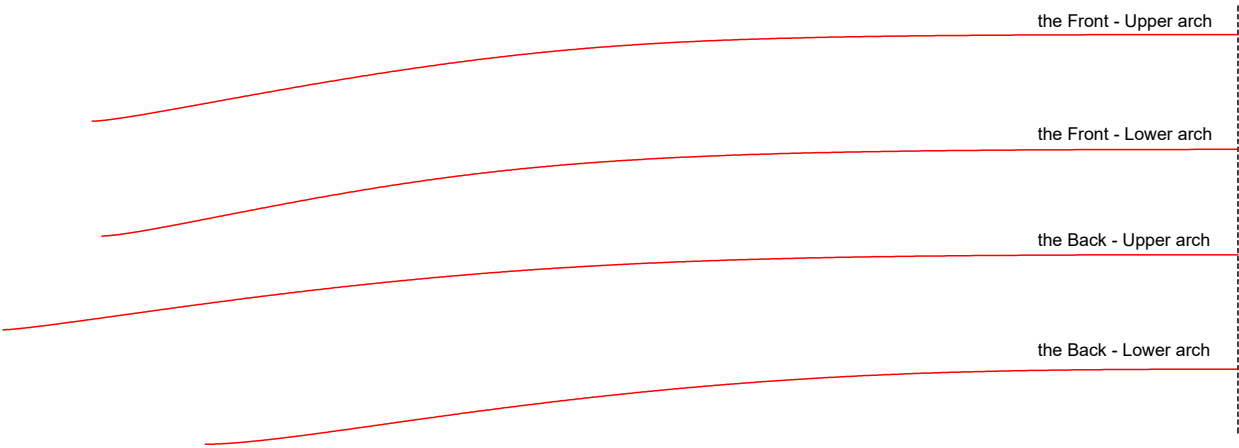


Figure 52: *Model B, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)*

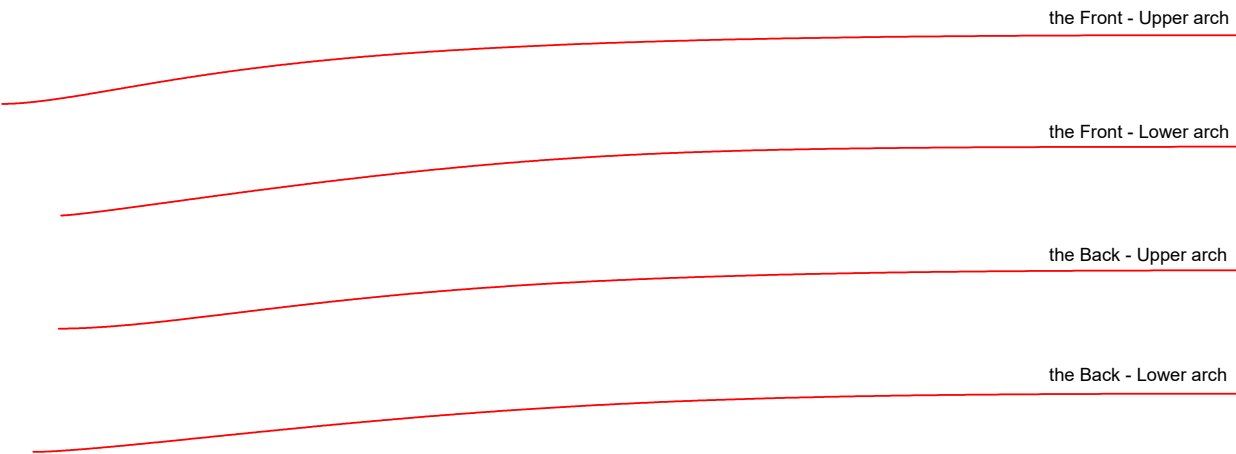


Figure 53: *Model C, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)*



Figure 54: *Model D, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)*

8.2 결과 분석

이번 장에서는 이미지, 파라미터, 충만도, 오차 등의 데이터를 바탕으로 재현 아치를 분석하고 평가합니다. 이 분석을 통해 스트라디바리 아치의 특징을 더 자세히 파악하고, 재현 방법의 신뢰도 또한 확인할 수 있을 것입니다.

8.2.1 이미지 분석

아래의 Figure 55~66는 재현 아치와 모델 아치를 겹쳐서 표시한 것입니다. 이 그림들을 시각적으로 비교하며 모델별, 위치별 특징을 분석합니다. 그림에서 붉은색 선은 재현 아치를, 검은색 선은 모델 아치를 나타냅니다.

두 아치를 겹쳐 비교하면 모델 아치의 울통불통함과 뒤틀림이 명확히 드러나므로, 모델의 문제점을 쉽게 파악할 수 있습니다. 이는 반대로 재현 아치의 신뢰도를 판단하기 용이하다는 의미이기도 합니다. 아마 대부분의 제작가는 이 비교만으로도 재현 곡선을 실제 악기 제작에 사용할 수 있을지 판단할 수 있을 것입니다.

* 모델 A-앞판(Figure 55) : 모델의 1, 5번 아치는 첫 번째 등고선 부근이 부자연스럽게 솟아있는 반면, 재현 아치는 부드러운 곡선을 보여줍니다. 모델의 2번 아치는 중앙부가 튀어나와 있지만 재현 아치는 매끄럽습니다. 모델의 3번 아치는 정점에서 급격히 낮아지는 문제가 있으나, 재현 아치는 완만하게 하강합니다. 4번 아치는 모델 아치의 중앙부가 살짝 튀어나온 것을 제외하면 두 곡선이 매우 유사합니다.

* 모델 A-뒷판(Figure 56) : 모델의 1번 아치는 앞판과 마찬가지로 첫 번째 등고선 부근이 부자연스럽게 솟아 있습니다. 3번 아치 역시 앞판과 유사한 경향을 보입니다. 2, 4, 5번 아치는 모델 아치가 조금씩 솟아나온 곳이 보입니다.

* 모델 B-앞판(Figure 57) : 1번 아치는 두 곡선이 매우 비슷합니다. 2번 아치는 모델 아치의 중앙부가 급격히 꺼져 있는 반면, 재현 아치는 부드럽습니다. 3번 아치는 모델의 상단부가 튀어나오고 하단부가 가라앉아 있습니다. 4, 5번 아치는 모델의 중앙부가 넓게 내려앉아 있습니다.

* 모델 B-뒷판(Figure 58) : 5번 아치는 모델의 중앙부가 부자연스럽게 많이 내려앉아 있습니다. 재현 아치는 이 부분을 매끄러운 곡선으로 복원합니다. 3, 4번 아치는 두 곡선이 매우 유사합니다.

* 모델 C-앞판(Figure 59) : 악기 크기가 커서인지 모델 A, B에 비해 요철이 덜합니다. 1, 2, 4, 5번 아치는 두 곡선이 매우 유사하며, 3번 아치는 모델 아치의 중앙부가 약간 더 높습니다.

* 모델 C-뒷판(Figure 60) : 모든 아치에서 모델 아치의 중앙부가 전체적으로 약간 높습니다. 이는 국부적인 요철이 아니므로 주목할 만합니다. 충만도 제어점을 중앙부로 옮기면 해결되겠지만, 재현의 일관성을 위해 제어점 위치를 바꾸지 않았습니다. 이는 이 악기 고유의 특징일 수 있습니다.

* 모델 D-앞판(Figure 61) : 다른 모델에 비해 오차가 커 보이지만, 이는 사운드 포스트로 인한 플레이트 뒤틀림 때문으로 추정됩니다. 실제로 좌측(베이스 바 쪽) 아치는 상단부가 대부분 낮은 반면, 우측(사운드 포스트 쪽) 아치는 상단부가 대부분 높습니다. 제작 당시의 모습은 이 둘의 중간 형태였을 것입니다. 만약 좌우 아치의 평균 곡선을

기준으로 재현한다면 오차는 훨씬 줄어든 것입니다.

* 모델 D-뒷판(Figure 62) : 뒷판 역시 사운드 포스트로 인한 뒤틀림이 보이지만, 1, 2번 아치는 예외적으로 두 곡선이 거의 일치합니다. 이는 뒷판의 해당 부위가 앞판보다 단단하고 구조적 영향을 덜 받기 때문으로 보입니다. 다른 모델에서도 뒷판 1, 2번 아치는 다른 부위에 비해 모델과 재현 곡선이 더 유사한 경향을 보입니다.

* 6번 아치(Figure 63~66) : 모델 A, B, C는 원본의 요철이 많지만 재현 아치는 이를 매끄럽게 보정합니다. 반면, CT 스캔으로 제작된 모델 D는 원본과 재현 아치가 매우 유사합니다. 이는 원본 데이터가 정확하면 본 재현 방법이 매우 높은 정확도를 보여준다는 것을 의미합니다. 특히 모델 A는 Figure 39에서 보았듯이, 모델의 1,5번 아치가 유독 위로 솟아있는 것을 확인할 수 있습니다.

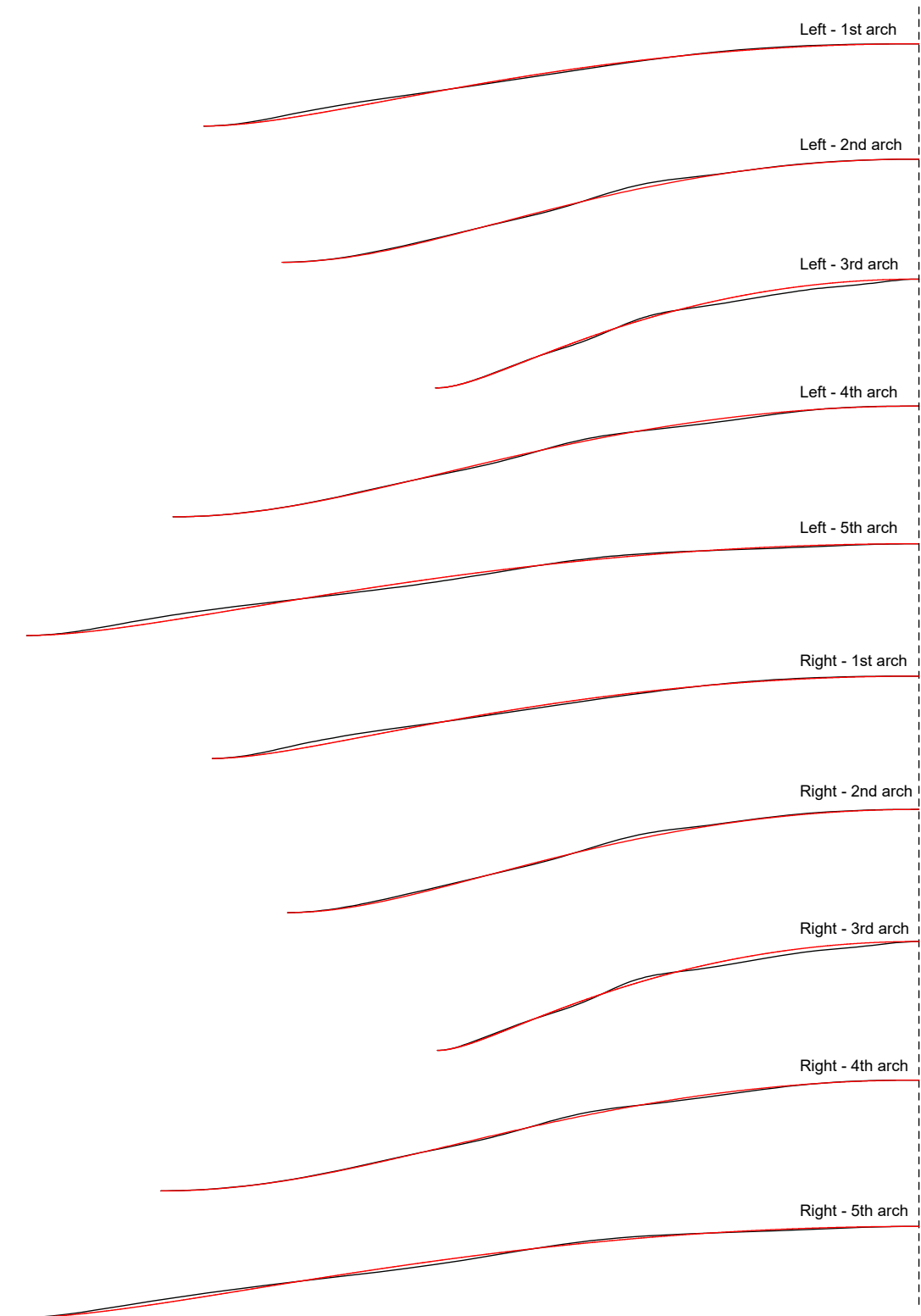


Figure 55: Model A, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

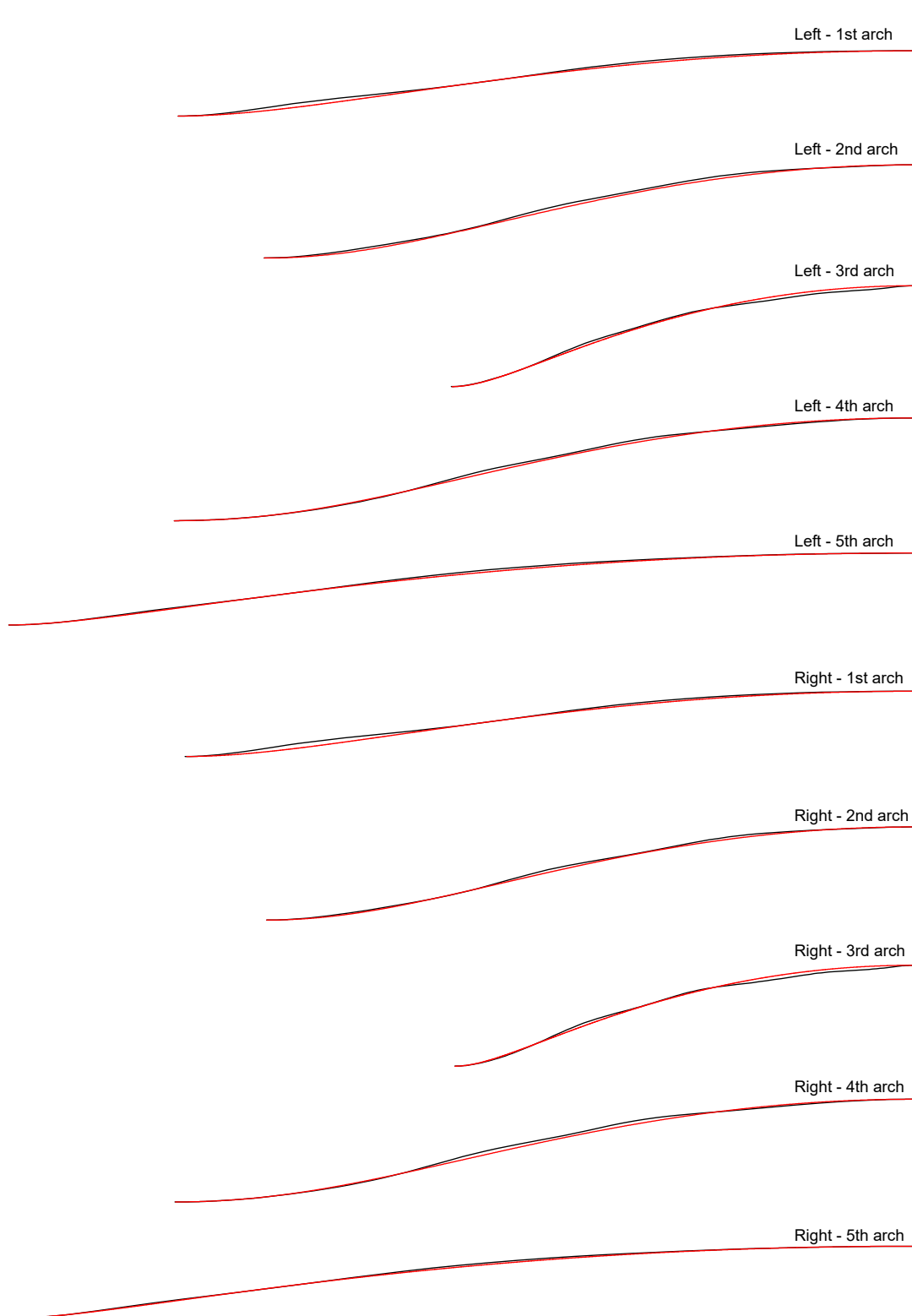


Figure 56: Model A, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

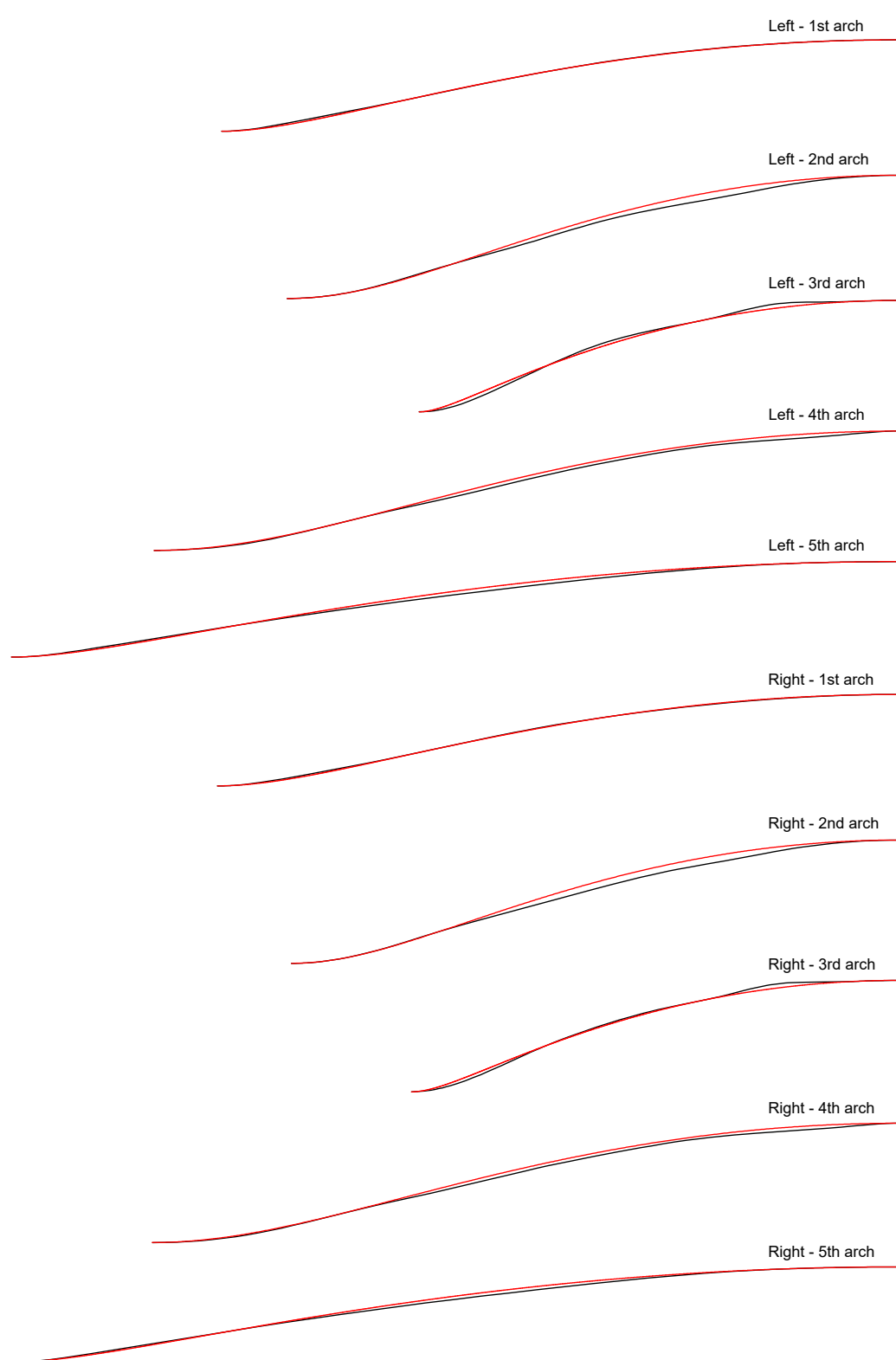


Figure 57: Model B, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

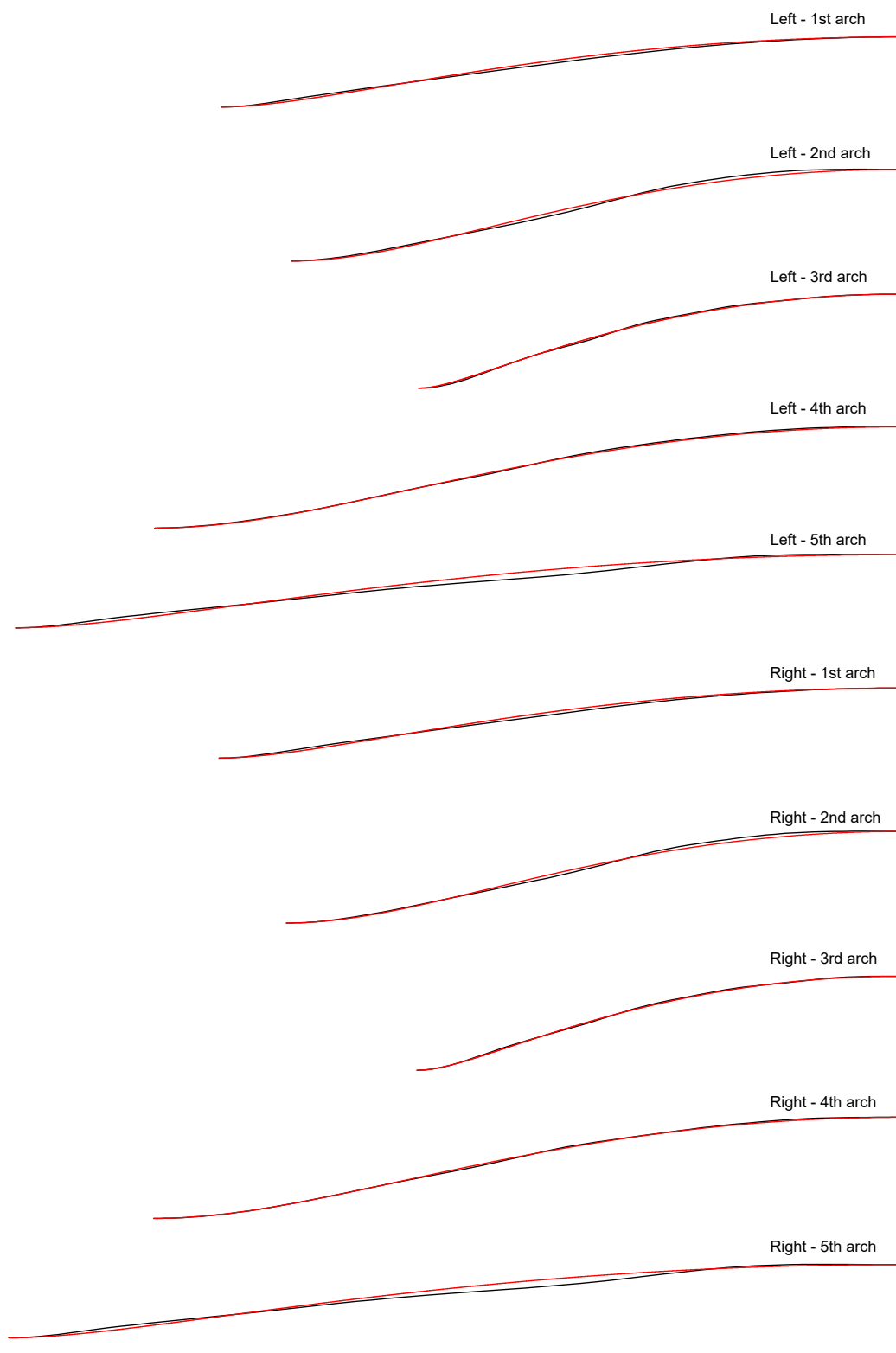


Figure 58: *Model B, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)*

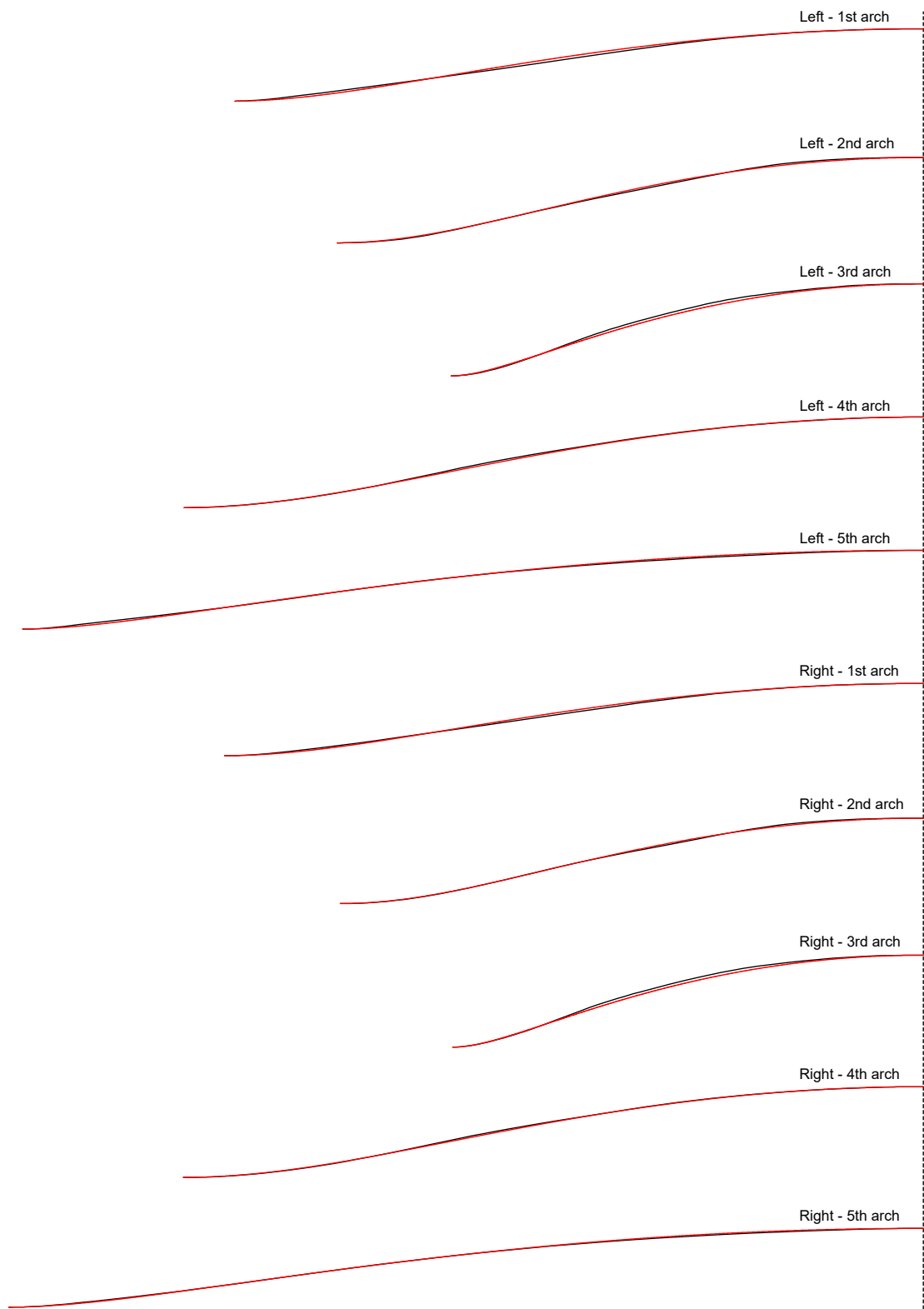


Figure 59: *Model C, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)*

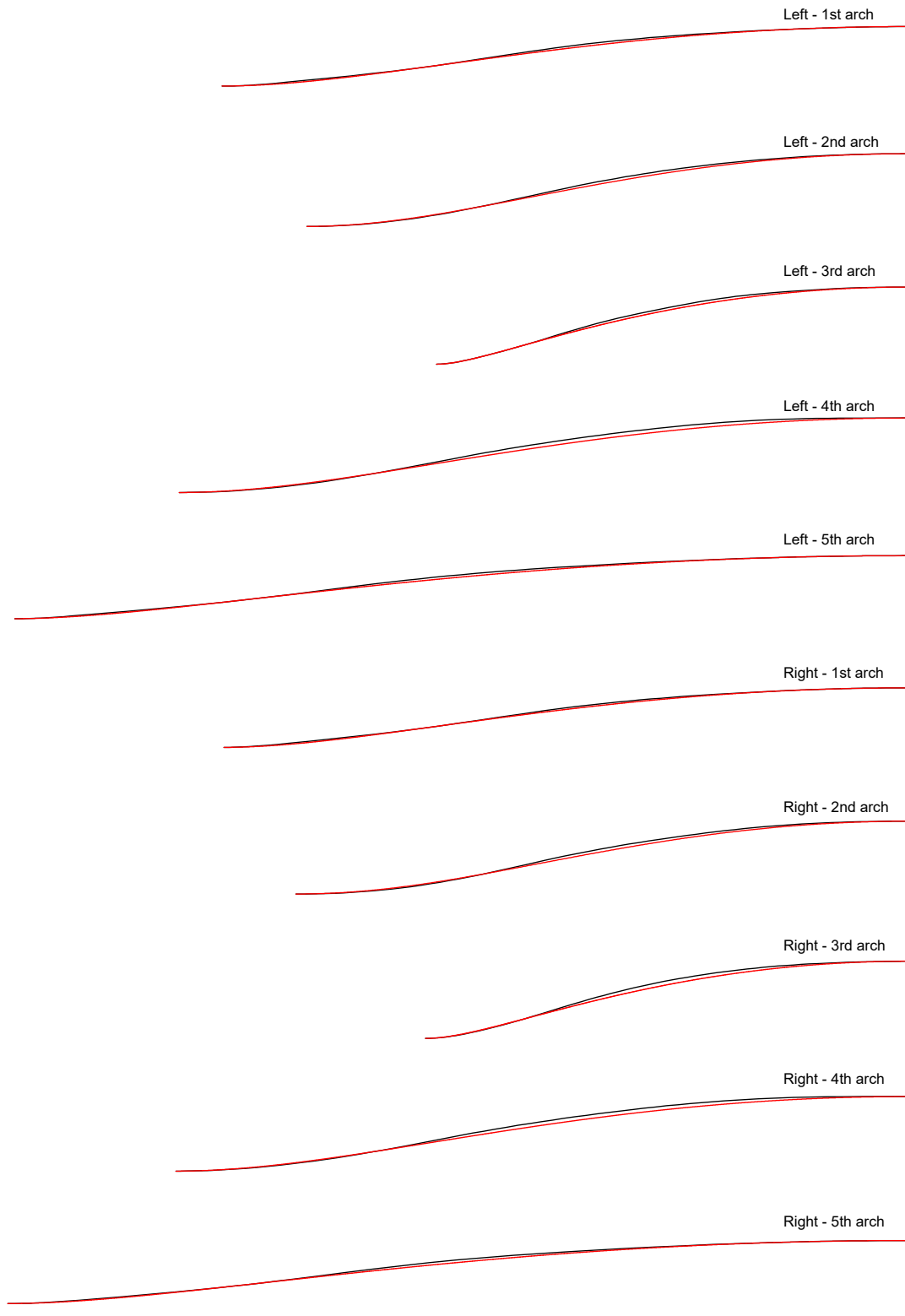


Figure 60: *Model C, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)*

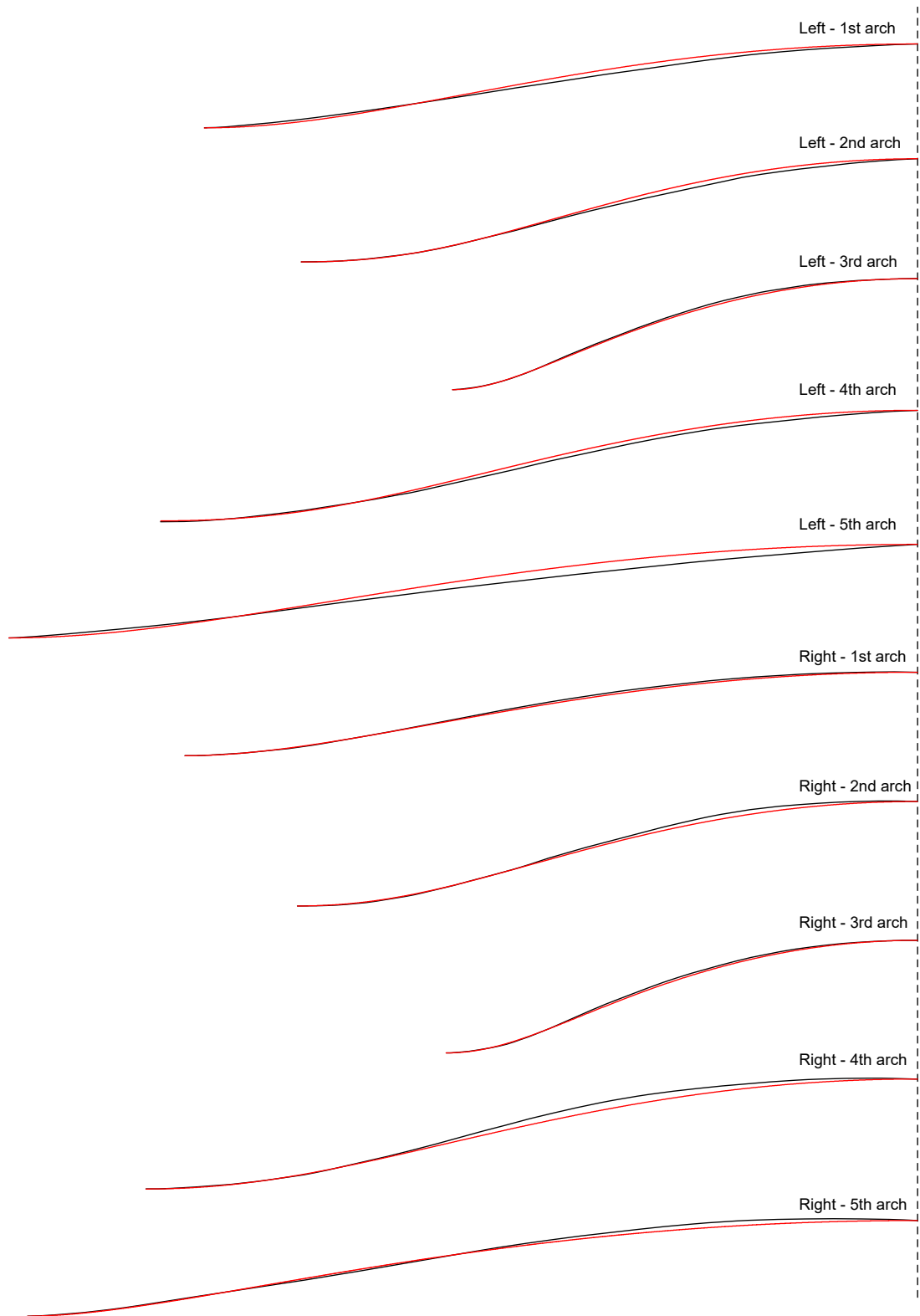


Figure 61: *Model D, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)*

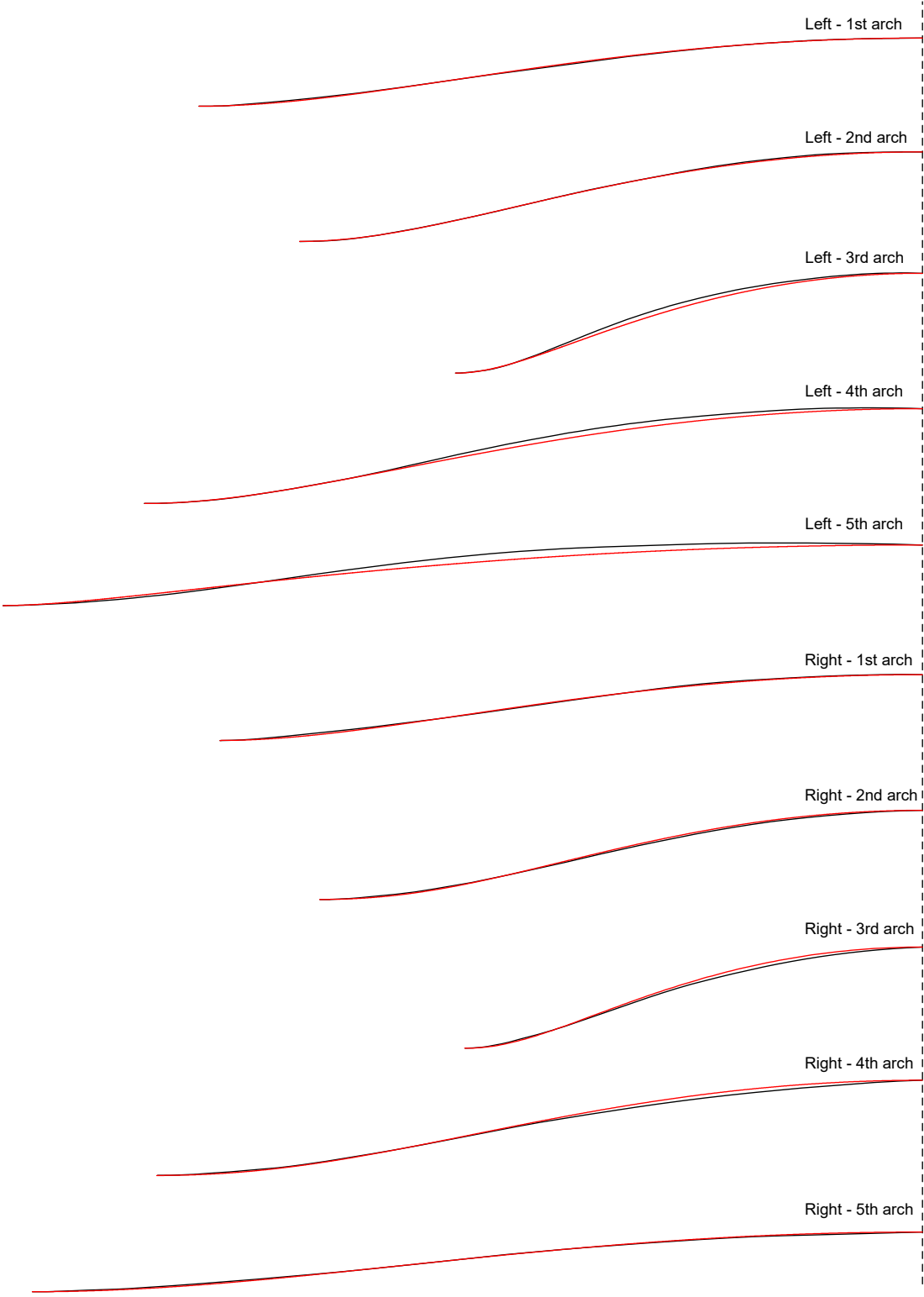


Figure 62: *Model D, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)*

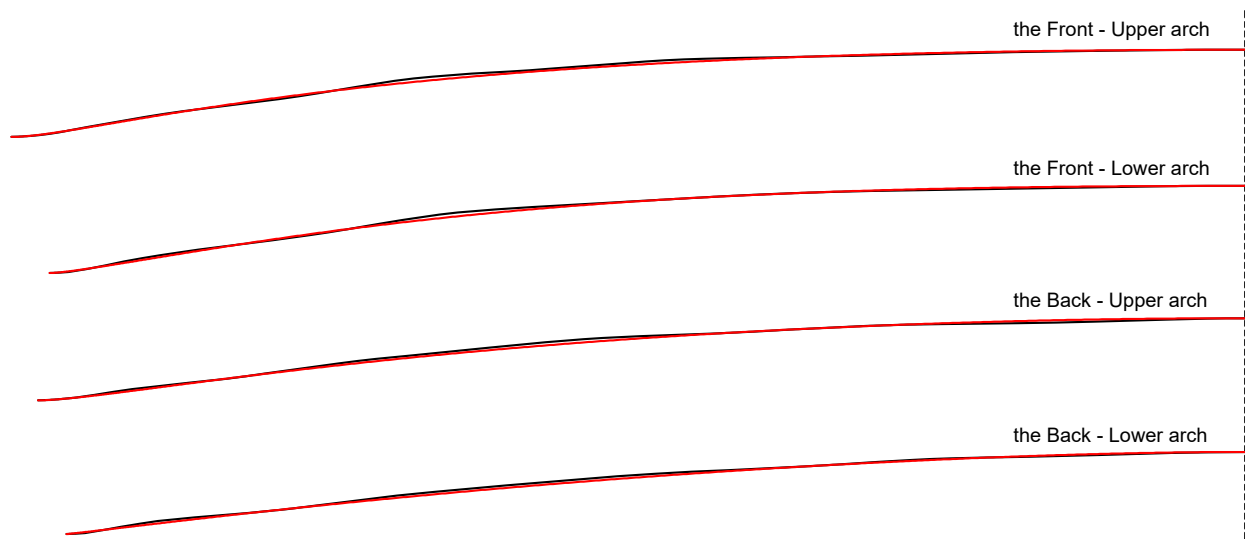


Figure 63: Model A, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

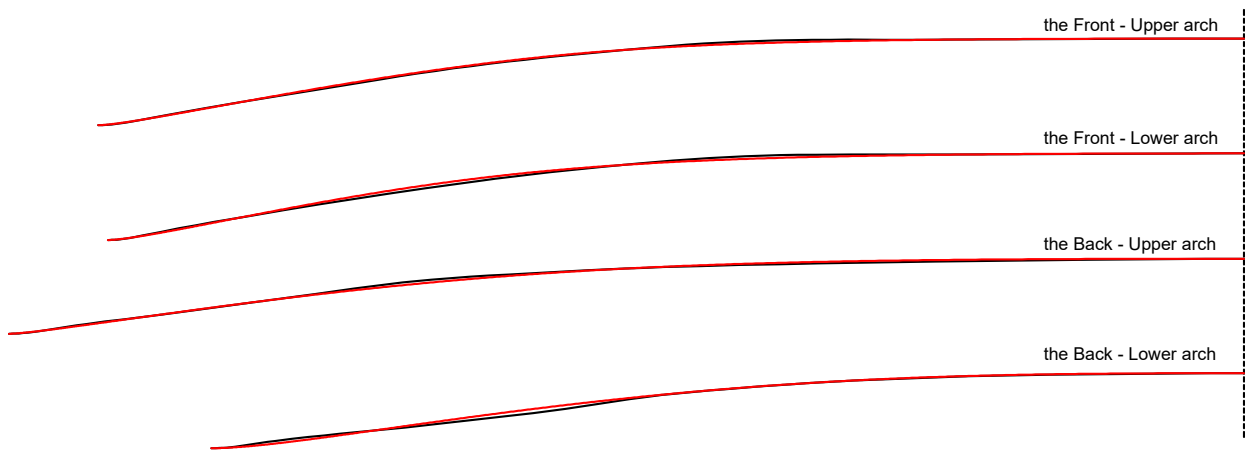


Figure 64: Model B, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

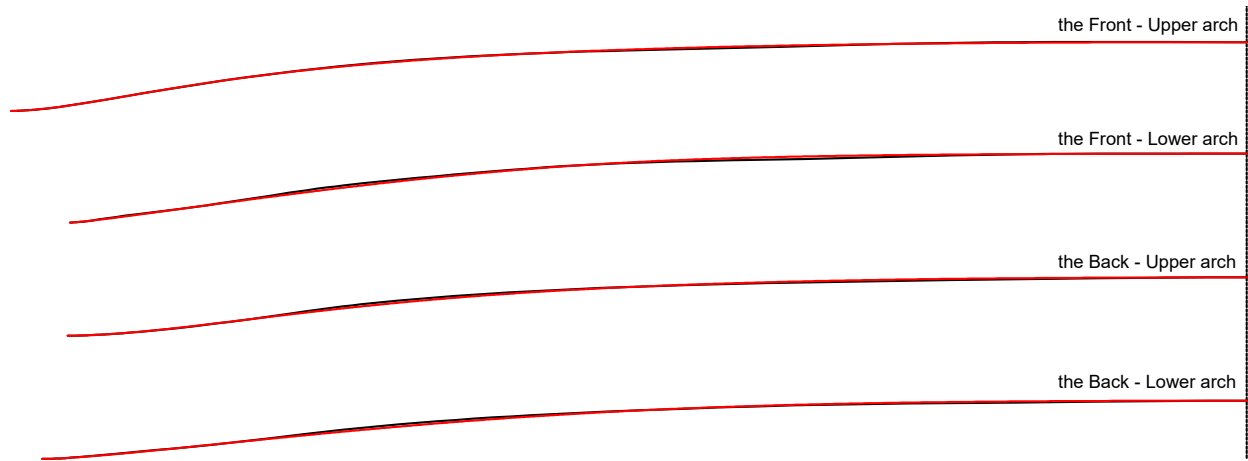


Figure 65: Model C, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

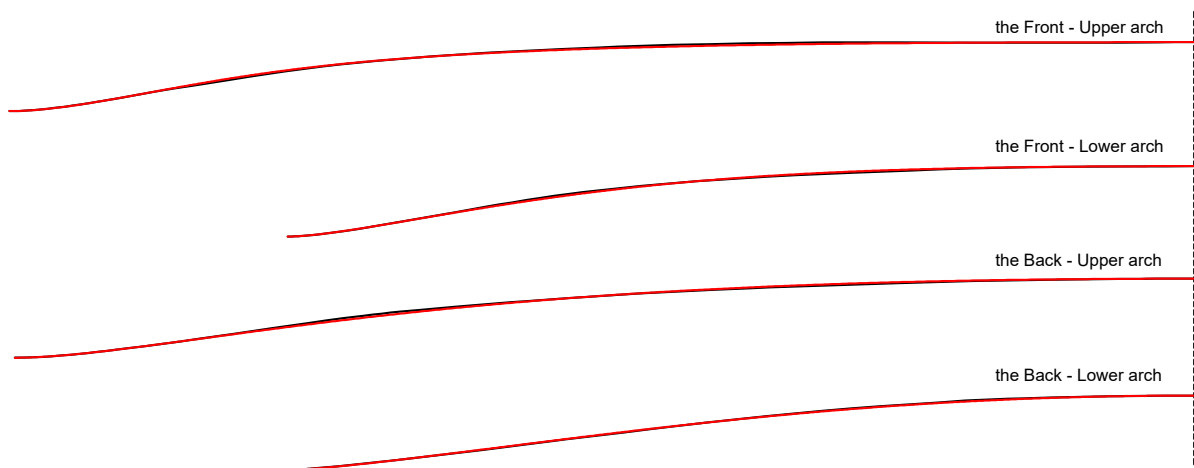


Figure 66: Model D, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

8.2.2 파라미터 분석

재현 아치의 파라미터는 아치의 모양과 성격을 나타내는 지표입니다. 이 파라미터를 분석하면 스트라디바리 아치의 특징을 파악할 수 있으며, 나아가 모양별로 아치를 분류하고 체계화하는 것도 가능합니다.

Table 5는 6번 아치들의 파라미터 값입니다. 6번 아치는 모두 CTDAcec 타입이므로 Type 항목은 생략했습니다. 각 파라미터의 의미는 다음과 같습니다.

expo는 3차 다항 곡선을 좌우로 밀집시키는 지수값입니다. 값이 +이면 왼쪽(아치 끝단 쪽)으로, -이면 오른쪽(아치 정점 쪽)으로 밀집됩니다. 표를 보면 대부분 +이므로, 3차 다항 곡선이 주로 왼쪽으로 밀집됨을 알 수 있습니다. 이는 아치 끝단으로 갈수록 경사가 급해짐을 의미하며, 절댓값이 클수록 그 정도가 심해집니다. 단, expo의 효과는 3차 다항 곡선의 진폭(bamp)에 비례하므로, 진폭이 0에 가까우면 expo 값의 영향력도 미미해집니다.

bamp는 3차 다항 곡선의 진폭과 손잡이 방향을 나타냅니다. 기호 -는 손잡이가 왼쪽(아치 끝단 쪽)에 있음을 의미하며, 기호가 없으면 오른쪽에 있다는 뜻입니다. 숫자 자체는 항상 음수인 진폭의 크기를 나타냅니다. 예를 들어, bamp = -7.313은 손잡이가 왼쪽에 있고 진폭이 -7.313임을 의미하며, bamp = 25.272는 손잡이가 오른쪽에 있고 진폭이 -25.272임을 뜻합니다. 표를 보면 대부분 - 기호가 있어, 손잡이가 주로 왼쪽에 위치함을 알 수 있습니다.

camp와 pamp는 각각 카테너리 곡선의 진폭과, 두 곡선을 더한 최종 패턴 곡선의 진폭을 의미합니다. bamp와 달리 기호는 실제 값의 부호를 나타냅니다. 예를 들어, camp = -31.683은 진폭이 음수(아래로 볼록)임을, camp = 2.123은 진폭이 양수(위로 볼록)임을 의미합니다. camp와 pamp에는 '손잡이'의 개념이 없으므로 마이너스 기호(-)는 실제 진폭을 의미하며, 이 둘의 값은 거의 대부분 음수입니다(아래로 볼록). 일반적으로 이 진폭 값들의 절댓값은 악기 크기에 비례하는 경향이 있습니다.

d-diff와 u-diff는 각각 하단 및 상단 모양 제어점과의 오차를 나타냅니다. 최대 ± 0.001 의 값을 가지며, 표에서 0.000은 오차가 0.0005보다 작음을 의미합니다.

허용 오차(tolerance)는 계산 시간을 줄이고 성공률을 높이기 위해 설정한 값으로, 아치의 폭(아치의 한쪽 끝단에서 정점까지)과 높이 및 충만도 제어점 Z까지의 거리에 관한 오차를 의미합니다. 근사 곡선인 CTDAce와 CTDAice는 매우 정밀한 계산이 가능하므로 허용 오차를 $1e-9$ 로 설정했습니다. 이는 오차가 거의 없다고 봐도 무방합니다.

모양제어점(Shape control point) 중에서 하단 제어점은 CP1(첫 번째 등고점)을 기준으로 하되, 곡선 생성이 불가능할 경우 y좌표를 일부 수정했습니다. 상단 제어점은 CP4~7 중 가장 적합한 점을 선택했습니다. 표를 보면 상당수 아치의 하단 모양 제어점 좌표가 수정되었는데, 이는 원본 모델의 첫 번째 등고점 데이터가 부정확할 수 있음을 시사합니다.

1~5번 아치는 대부분 CTDA보다 충만도가 큰 CHTA 타입입니다. 일부 아치만 CTDA보다 충만도가 작은 CETA 또는 CTDAice 타입으로 재현되었습니다. R값이 존재하지 않는 근사 곡선들은 nCHTAce나 nCETAice처럼 패턴 곡선의 진폭(camp)과 지수값(expo) 파라미터를 가집니다.

Model	Plate	Side	expo	bamp	camp	pamp	d-diff	u-diff	tolerance	Shape control point
A	Front	Upper	-0.613	-7.313	-31.683	-38.720	0.001	0.000	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.400	-5.450	-34.108	-37.083	0.000	0.000	0.001	CP1(y:-0.2), CP6
	Back	Upper	0.613	14.781	-14.435	-28.922	0.001	0.001	0.001	CP1(y:-0.2), CP6
		Lower	0.114	25.272	-0.095	-25.358	0.001	0.001	0.001	CP1(y:-0.2), CP6
B	Front	Upper	2.259	-28.288	-40.044	-55.495	-0.001	-0.001	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.725	-26.375	-39.475	-56.240	0.000	-0.001	0.001	CP1(y:-0.1), CP6
	Back	Upper	2.113	-20.238	-44.137	-53.806	-0.001	-0.001	0.001	CP1(y:-0.1), CP7
		Lower	2.881	-8.822	-28.292	-30.537	-0.001	0.000	0.001	CP1(y:-0.4), CP7
C	Front	Upper	0.472	-53.484	-68.319	-114.736	0.000	-0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	2.395	-47.717	-75.858	-99.146	-0.001	-0.001	0.001	CP1(y:-0.1), CP5
	Back	Upper	0.556	-39.756	-55.440	-89.199	-0.001	0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	1.875	-27.800	-67.709	-82.027	-0.001	0.000	0.001	CP1(y:-0.1), CP5
D	Front	Upper	0.750	-33.550	-33.083	-61.701	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	1.300	-9.850	-25.149	-31.493	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
	Back	Upper	0.038	-5.913	-29.014	-34.157	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	-0.888	6.745	-9.072	-14.478	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4

Table 5: Detailed parameters by model for the 6th arch. Type:CTDAcec, expo:Exponent of distorted cubic polynomial curve(+:left, -:right), bamp:Cubic polynomial curve amplitude and handle direction, camp:Catenary curve amplitude, pamp:Final pattern curve amplitude, d-diff/u-diff>Error with bottom/top shape control point, tolerance:Calculation tolerance for distance to shape and fullness control points, Shape control point:Information on top/bottom shape control points.

Table 6과 7은 1~5번 아치의 파라미터를 정리한 것입니다. 여기서 주목할 점은, CTDA보다 충만도가 작은 CETA와 CTDAice 타입(* 표시)이 대부분 2, 4번 아치에 집중되어 있다는 사실입니다. 2, 4번 아치 중 CHTA 타입인 경우를 봐도, 다른 아치에 비해 R 값이 유독 큼니다. R 값이 크다는 것은 곡선이 CTDA에 가깝다는, 즉 충만도가 CTDA보다 아주 조금 클 뿐이라는 의미입니다. 결론적으로 파라미터는 2, 4번 아치가 다른 아치에 비해 충만도가 작다는 경향을 명확히 보여줍니다.

반면, 트로코이드의 한계를 넘어선 근사 곡선(nCHTAce)은 5번 아치에 집중되어 있습니다. nCHTAce가 아닌 CHTA 타입의 5번 아치 역시 다른 아치에 비해 R 값이 작은 경향을 보입니다. 이는 '5번 아치가 다른 아치에 비해 충만도가 크다'는 것을 의미합니다.

지금까지의 분석을 '2, 4번 아치는 충만도가 작고 5번 아치는 크다'라고 정리할 수 있습니다. 하지만 여기에는 한 가지 문제점이 있습니다. 폭과 높이가 서로 다른 아치들의 충만도를 직접 비교하는 것은 이치에 맞지 않기 때문입니다. 다음 절에서는 이 문제를 해결하고, 폭과 높이가 다른 아치들의 충만도를 객관적으로 비교하는 방법을 설명하겠습니다.

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
A	Front	BB(L)	1	CHTA	176.447	30.845	15.192	-	-	0.010
			2	CHTA	10688.846	21.496	5.560	-	-	0.010
			3	CHTA	159.219	18.082	10.368	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	25.086	5.850	0.155	-2.034	1E-09
			5	CHTA	184.145	39.783	21.924	-	-	0.010
		SP(R)	1	CHTA	138.488	30.733	18.188	-	-	0.010
			2	CHTA	886.691	22.525	6.785	-	-	0.010
			3	CHTA	129.913	18.195	11.458	-	-	0.010
			4	*CETA	1939.080	24.277	5.065	-	-	0.010
			5	CHTA	217.751	40.452	19.656	-	-	0.010
	Back	SP(L)	1	CHTA	215.423	32.714	12.978	-	-	0.010
			2	*CETA	3644.551	21.072	4.548	-	-	0.010
			3	CHTA	178.081	16.934	8.878	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	24.513	5.350	1.326	-2.667	1E-09
			5	nCHTAce	167.144	42.118	24.265	-2.663	-0.811	0.010
		BB(R)	1	CHTA	202.089	32.382	13.420	-	-	0.010
			2	*CTDAice	-	21.451	4.850	0.015	-2.270	1E-09
			3	CHTA	160.507	16.909	9.252	-	-	0.010
			4	*CETA	1511.957	22.912	4.433	-	-	0.010
			5	nCHTAce	166.468	41.972	24.214	-3.600	-0.817	0.010
B	Front	BB(L)	1	CHTA	212.206	33.539	16.695	-	-	0.012
			2	*CETA	3239.278	24.081	7.296	-	-	0.012
			3	CHTA	136.848	21.652	14.691	-	-	0.012
			4	CTDAce	-	29.835	7.500	-0.198	-1.083	1E-09
			5	CHTA	189.793	46.840	29.330	-	-	0.012
		SP(R)	1	CHTA	267.250	33.225	14.322	-	-	0.012
			2	CHTA	2051.964	24.931	8.476	-	-	0.012
			3	CHTA	161.254	21.893	13.667	-	-	0.012
			4	CHTA	3322.583	30.652	8.176	-	-	0.012
			5	CHTA	185.660	47.028	30.081	-	-	0.012
	Back	SP(L)	1	CHTA	161.819	36.062	20.395	-	-	0.012
			2	CHTA	820.860	26.379	7.691	-	-	0.012
			3	CHTA	128.945	22.464	14.458	-	-	0.012
			4	CHTA	1431.019	31.890	7.995	-	-	0.012
			5	nCHTAce	192.764	49.308	29.156	-0.139	-0.889	0.012
		BB(R)	1	CHTA	167.752	36.198	19.911	-	-	0.012
			2	CHTA	991.802	26.340	7.360	-	-	0.012
			3	CHTA	151.718	22.338	13.093	-	-	0.012
			4	CHTA	1060.475	32.554	8.616	-	-	0.012
			5	nCHTAce	196.804	49.781	29.058	-0.849	-0.959	0.012

Table 6: Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5(1/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, *:Curve with less fullness than a CTDA.

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
C	Front	SP(L)	1	CHTA	627.959	62.470	20.796	-	-	0.020
			2	CHTA	4318.054	43.962	10.818	-	-	0.020
			3	CHTA	316.263	39.224	21.179	-	-	0.020
			4	CHTA	2945.004	57.413	12.935	-	-	0.020
			5	nCHTAce	353.728	90.060	54.001	-0.796	-1.031	0.020
		BB(R)	1	CHTA	841.556	61.674	17.558	-	-	0.020
			2	CHTA	5781.621	43.373	10.536	-	-	0.020
			3	CHTA	314.605	39.085	21.169	-	-	0.020
			4	CHTA	3217.281	57.201	12.712	-	-	0.020
			5	CHTA	383.803	91.717	51.661	-	-	0.020
	Back	BB(L)	1	CHTA	643.186	64.150	19.267	-	-	0.020
			2	CHTA	4887.919	44.934	9.231	-	-	0.020
			3	CHTA	204.809	41.106	26.342	-	-	0.020
			4	CHTA	1442.634	60.568	13.923	-	-	0.020
			5	nCHTAce	380.492	93.017	50.206	-0.186	-0.877	0.020
		SP(R)	1	CHTA	516.159	65.516	22.815	-	-	0.020
			2	*CETA	5764.898	42.643	7.444	-	-	0.020
			3	CHTA	265.716	41.726	22.650	-	-	0.020
			4	CHTA	1375.980	61.202	14.278	-	-	0.020
			5	CHTA	428.348	93.818	45.638	-	-	0.020
D	Front	BB(L)	1	CHTA	1661.465	25.504	5.362	-	-	0.010
			2	*CETA	487.376	17.645	3.628	-	-	0.010
			3	CHTA	813.161	16.167	6.660	-	-	0.010
			4	*nCETAice	687.004	21.594	3.899	0.037	-1.901	0.010
			5	CHTA	886.179	35.128	7.975	-	-	0.010
		SP(R)	1	CHTA	601.170	28.397	7.329	-	-	0.010
			2	*CETA	738.275	19.014	4.213	-	-	0.010
			3	*CETA	1018.819	15.473	5.377	-	-	0.010
			4	*CETA	1527.610	24.364	4.809	-	-	0.010
			5	CHTA	216.966	39.200	19.164	-	-	0.010
	Back	SP(L)	1	CHTA	598.251	28.653	6.487	-	-	0.010
			2	CHTA	1499.270	21.831	5.474	-	-	0.010
			3	CHTA	414.510	16.643	6.825	-	-	0.010
			4	CHTA	635.787	29.673	8.026	-	-	0.010
			5	nCHTAce	186.319	45.242	23.778	-3.622	-0.963	0.010
		BB(R)	1	CHTA	456.513	28.642	7.165	-	-	0.010
			2	*CETA	767.208	18.183	3.521	-	-	0.010
			3	CHTA	7156.057	15.358	5.418	-	-	0.010
			4	*CETA	1446.391	23.617	3.987	-	-	0.010
			5	CHTA	2840.146	32.331	3.988	-	-	0.010

Table 7: Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5(2/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, *:Curve with less fullness than a CTDA.

8.2.3 충만도 분석

흔히 아치의 볼륨이라는 용어를 사용하지만, 이는 2차원 단면인 개별 아치에는 엄밀히 말해 맞지 않는 표현입니다. 볼륨은 3차원의 부피를 의미하는데, 2차원인 아치 단면에는 부피가 없기 때문입니다. 물론 ‘바이올린 앞판의 볼륨이 뒤판보다 크다’는 표현은 가능합니다. 이때는 3차원인 앞판 전체의 부피를 의미하기 때문입니다. 하지만 본 보고서는 2차원 평면에서 아치가 부풀어 오른 정도를 다루므로 볼륨이라는 용어는 적절하지 않습니다.

따라서 2차원 평면에서 아치가 부풀어 오른 정도를 나타낼 적절한 용어와 객관적인 지표가 필요합니다. 특히 폭과 높이가 다른 아치들을 서로 비교하려면 공통된 기준이 있어야 합니다. 현재 현악기 아치의 2차원 형태를 나타내는 공식적인 용어나 지표가 없어, 본 보고서에서 이를 새롭게 정의하여 사용하고자 합니다.

2차원 아치가 부풀어 오른 정도를 나타내는 용어로 ‘충만도(Fullness)’⁷를 사용하겠습니다. 이 용어는 선박 공학 등 다른 분야에서 선체의 뚱뚱한 정도나 특정 단면이 기준 형상을 얼마나 채우는지를 나타낼 때 이미 사용되는 개념입니다. 따라서 2차원 아치의 형태를 표현하는 데 가장 적합하다고 판단했습니다.

이 충만도를 수치화하기 위한 지표로 ‘절대 충만도 지수(Absolute Fullness Index, AFI)’와 ‘상대 충만도 지수(Relative Fullness Index, RFI)’를 도입하였습니다. 먼저 두 지표를 정의한 뒤, 이를 이용해 아치를 분석하겠습니다.

충만도는 면적과 비례하는 개념이므로, 먼저 아치의 면적을 정의하겠습니다.

(※ 이후 모든 ‘아치 면적과 폭’은 좌우 대칭을 고려하여 ‘아치 절반의 면적과 폭’을 의미합니다.)

Definition 8.1. 아치의 면적(Area of the arch)

아치 곡선과, 아치의 끝점을 지나는 수평선 및 정점을 지나는 수직선으로 둘러싸인 닫힌 도형의 면적

Figure 67.(a)의 회색 부분이 이에 해당합니다.

이를 바탕으로 ‘절대 충만도 지수’를 다음과 같이 정의합니다.

Definition 8.2. 절대 충만도 지수(AFI, Absolute Fullness Index, 단위:[%])

아치를 감싸는 최소 면적의 직사각형(폭: 아치 폭, 높이: 아치 높이)에 대한 아치 면적의 비율. 백분율(%)로 표기. 줄여서 ‘절대 충만도(Absolute Fullness)’로도 표기

위 정의에 따라 AFI는 다음의 식으로 계산합니다.

$$AFI[\%] = \frac{\text{아치 면적}}{\text{아치 폭} \times \text{아치 높이}} \times 100$$

⁷부풀음의 정도를 지칭하는 용어로서, 곡률(Curvature), 볼록성(Convexity), 팽창도(Bulginess) 등 여러가지 후보가 있었으나, 단어의 쓰임과 뉘앙스 및 물리학 용어로서의 적합성 등을 종합적으로 고려하여 ‘충만도(Fullness)’라는 용어를 최종적으로 선정하였습니다.

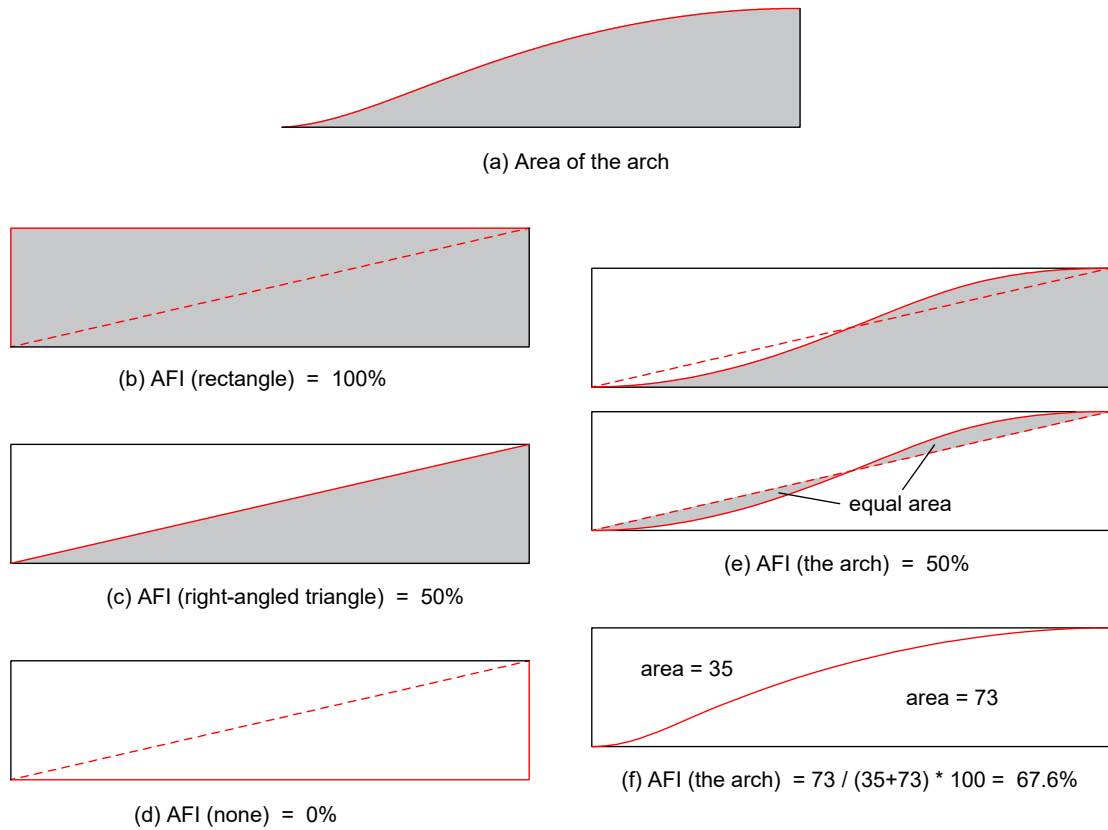


Figure 67: Arch area and Absolute Fullness Index(AFI)

이처럼 특정 도형의 면적을 그것을 감싸는 최소 면적의 직사각형으로 나누는 방법은, 해당 도형의 형태를 분석하고 정규화하는 데 흔히 사용됩니다.

이 정의에 따르면, 폭과 높이가 같은 두 아치 A(AFI= 85%)와 B(AFI= 77%)가 있을 때, ‘아치 A는 아치 B보다 AFI가 약 8% 더 충만하다’고 표현할 수 있습니다.

(※ 아치가 좌우 대칭이라면, 아치 전체를 기준으로 계산한 AFI 값은 아치 절반을 기준으로 계산한 값과 항상 같습니다.)

Figure 67.(b)는 AFI 100%로, 아치의 곡선(적색 실선)이 부풀어올라 직사각형에 무한히 가까워졌을때의 모습이라고 생각할 수 있습니다. (c)는 AFI 50%로, 아치의 곡선이 직선으로 펴졌을 때의 모습과 같습니다. 그러나 실제 아치는 직선이 아니므로, 아치의 끝점과 정점을 잇는 직선과 아치의 곡선 사이의 면적이 직선 위와 아래가 동일할 때(e) 해당 아치의 면적은 직각삼각형의 면적과 동일하므로 AFI는 50%가 됩니다. AFI 0%는 (d)와 같이 아치의 면적이 아예 존재하지 않는 경우입니다.

위 정의에 따라, Figure 67.(f)와 같이 아치 넓이가 73 이고 직사각형 넓이가 108(=35+73) 인 아치의 AFI는 다음의 식으로 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 AFI &= \frac{\text{아치 넓이}}{\text{직사각형 넓이}} \times 100 \\
 &= \frac{73}{35 + 73} \times 100 \\
 &\approx 67.6\%
 \end{aligned}$$

다음으로 '상대 충만도 지수'를 다음과 같이 정의합니다.

Definition 8.3. 상대 충만도 지수(RFI, Relative Fullness Index, 단위:[%])

동일한 폭과 높이를 가지는 maxCHTA, CTDA, minCETA 가 있을 때, 아치 면적이 maxCHTA 면적과 같을 때 +100%, CTDA 면적과 같을 때 0%, minCETA 면적과 같을 때 -100% 으로 정하며, 이 척도에 따라 아치의 면적을 환산한 백분율 값. 줄여서 '상대 충만도(Relative Fullness)' 로도 표기.

즉, AFI는 아치를 감싸는 직사각형을 기준으로 삼지만, RFI는 트로코이드로 만들 수 있는 최대(maxCHTA), 기준(CTDA), 최소(minCETA) 충만도 아치를 척도로 삼습니다.

RFI를 도입한 이유는 다음과 같은 정보를 쉽게 파악하기 위해서입니다.

- 해당 아치의 충만도가 트로코이드 범위 내에서 어느 정도 수준인지
- 충만도를 얼마나 더 키우거나 줄일 수 있는지
- 해당 아치가 일반 트로코이드 곡선인지, 아니면 그 한계를 넘어선 근사 곡선인지

예를 들어, 어떤 아치의 RFI가 83% 라면, 이 아치는 기준(CTDA)보다 충만도가 크고(CHTA 타입), 최대 충만도(100%) 까지 아직 여유가 있음을 의미합니다. RFI가 112% 라면 최대 충만도(100%)를 넘어섰다는 의미이므로, CHTA의 한계를 넘어선 근사 곡선(nCHTAce)임을 알 수 있습니다. 마찬가지로 RFI가 -35% 이면 충만도가 작은 CETA 타입이고, -101% 이면 CETA의 한계를 넘어선 근사 곡선(nCETAice)임을 알 수 있습니다.

위 정의에 따라 RFI는 다음의 식으로 계산할 수 있습니다.

a. 아치 면적이 CTDA 면적보다 크거나 같을 경우($RFI \geq 0[\%]$) :

$$RFI[\%] = \frac{\text{아치 면적} - \text{CTDA 면적}}{\text{CHTA 면적} - \text{CTDA 면적}} \times 100$$

b. 아치 면적이 CTDA 면적보다 작을 경우($RFI < 0[\%]$) :

$$RFI[\%] = \frac{\text{아치 면적} - \text{CTDA 면적}}{\text{CTDA 면적} - \text{CETA 면적}} \times 100$$

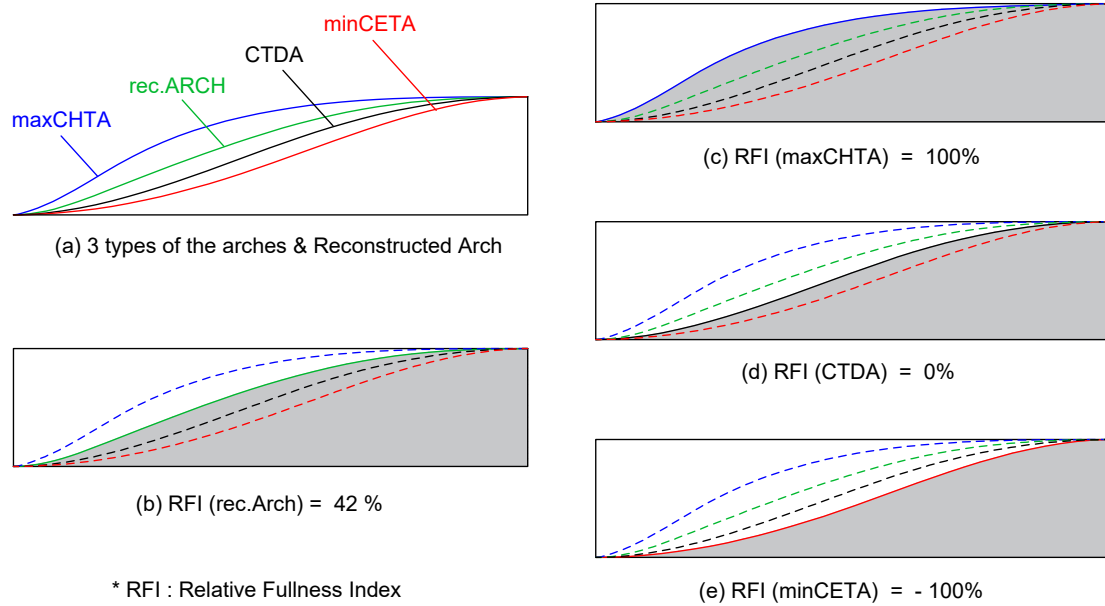


Figure 68: Arch area and Relative Fullness Index(RFI)

Figure 68는 RFI의 개념을 보여줍니다. RFI는 아치를 감싸는 직사각형이 아닌, maxCHTA, CTDA, minCETA의 면적을 척도로 사용합니다.

RFI에서 한 가지 주의할 점은, +100 ~ 0% 구간과 0 ~ -100% 구간의 면적 변화량이 서로 다르다는 것입니다. 이는 트로코이드 곡선의 특성에서 비롯되는데, 일반적으로 CHTA의 가변 범위가 CETA의 가변 범위보다 넓기 때문입니다.

새롭게 정의한 두 지표를 바탕으로, 이제 재현된 아치들의 충만도를 분석하고 그 특징을 살펴보겠습니다.

Table 8~10은 모든 재현 아치의 충만도를 나타냅니다. 각 재현 아치(rec.Arch)와 동일한 폭과 높이를 가진 maxCHTA, CTDA, minCETA의 면적, 그리고 이를 바탕으로 계산한 AFI와 RFI 값을 보여줍니다.

먼저 6번 아치를 살펴보겠습니다. Table 8을 보면, 트로코이드로 표현 가능한 충만도 범위(AFI 기준 minCETA 약 47% maxCHTA 약 58%)는 비교적 좁고 비교적 균일한 분포를 가지고 있습니다. 재현된 6번 아치의 RFI는 117%에서 405%까지 매우 넓게 분포하며, 모두 트로코이드의 최대 충만도(RFI 100%)를 크게 넘어섭니다. 이는 6번 아치의 충만도가 매우 크다는 것을 의미합니다. 또한 대체로 앞판의 충만도가 뒷판보다 큰 경향을 보입니다. 특히 모델 D는 앞판 상단부(RFI 400% 이상)와 뒷판 하단부(RFI 120% 미만)의 충만도 차이가 매우 큼니다.

6번 아치는 CTDA 곡선의 정점 부근을 길게 늘린 모양을 하고 있으며, 이 때문에 RFI가 폭발적으로 증가합니다. 모델 D의 극단적인 RFI 값은 모델링 과정에서 지적했듯 부정확한 정점 위치 때문으로 추정됩니다. 실제로 모델 D의 6번 아치 상단부 길이는 다른 모델보다 훨씬 길며, 이것이 상단과 하단의 충만도 차이를 극대화하는 원인으로 보입니다. (※ 6번 아치는 충만도 분석 시 허용 오차를 다른 아치의 두 배로 설정했습니다.)

다음으로 1~5번 아치를 살펴보겠습니다. Table 9~10에서 RFI가 음수인 아치(CETA, CTDAice 등)는 거의 모두 2

M.	P.	S.	Area [mm^2]				AFI [%]				RFI [%]	T.
			maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
A	F	U	1244.01	1112.16	977.04	1491.15	59.03	52.77	46.36	70.75	287.46	0.020
		L	1207.87	1079.41	996.54	1449.82	59.15	52.86	48.80	71.00	288.34	0.020
	B	U	1142.91	1023.63	909.64	1286.29	58.81	52.67	46.81	66.19	220.21	0.020
		L	1118.26	1000.86	948.03	1210.53	58.92	52.73	49.95	63.78	178.60	0.020
B	F	U	1768.14	1575.83	1407.11	2213.83	59.43	52.97	47.30	74.41	331.76	0.024
		L	1756.12	1563.08	1382.83	2211.13	59.54	52.99	46.88	74.97	335.71	0.024
	B	U	1625.04	1456.00	1294.11	2023.47	58.47	52.39	46.56	72.80	335.70	0.024
		L	1378.13	1228.24	1085.01	1560.59	59.30	52.85	46.69	67.16	221.74	0.024
C	F	U	4607.17	4136.30	3754.20	5985.72	58.12	52.18	47.36	75.52	392.77	0.040
		L	4399.86	3947.20	3559.57	5591.38	58.29	52.29	47.16	74.07	363.23	0.040
	B	U	3697.77	3330.29	3054.43	4558.16	57.67	51.94	47.64	71.09	334.13	0.040
		L	3774.78	3399.36	3289.01	4589.39	57.63	51.90	50.21	70.07	316.98	0.040
D	F	U	1267.91	1140.08	1007.28	1657.88	58.15	52.29	46.20	76.03	405.08	0.020
		L	1011.50	902.28	796.18	1191.74	59.47	53.05	46.81	70.06	265.02	0.020
	B	U	1460.76	1308.62	1171.55	1664.11	58.75	52.63	47.12	66.93	233.67	0.020
		L	1084.50	965.06	858.30	1105.91	59.80	53.21	47.32	60.98	117.92	0.020

Table 8: Arch Area and Fullness by Model for the 6th Arch. M.:Model, P.:Front(F)/Back(B), S.:Upper(U)/Lower(L), Type:CTDAcec, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance(calculation tolerance for distance to arch width, height, and fullness control point).

번 또는 4번 아치입니다. 이는 파라미터 분석 결과와 마찬가지로 2, 4번 아치는 다른 아치에 비해 충만도가 작다는 특징을 보여줍니다. 이 아치들은 플레이트의 코너 부근에 위치하여 끝단이 길게 늘어나는 형태를 띠기 때문에 충만도가 낮아지는 것으로 보입니다. RFI가 양수인 경우에도, 다른 아치에 비해 그 값이 현저히 낮은 것을 확인할 수 있습니다.

또 다른 특징은 5번 아치의 RFI가 다른 아치에 비해 크다는 점입니다. RFI가 100을 넘어 근사 곡선으로 재현된 경우도 많으며, 이는 파라미터 분석 결과와 일치합니다.

아치 타입을 보면, nCHTAce로 재현된 아치는 모두 RFI가 100%를 초과합니다. 이는 트로코이드의 한계를 넘어 이론적으로 존재하지 않는 아치를 근사 곡선으로 구현했음을 의미합니다. 반면, 모델 D의 nCETAice 아치는 RFI가 -56.81%로, 한계치인 -100%에 미치지 못합니다. 이는 이론적으로는 존재하지만 계산상의 문제로 재현하지 못한 경우에 해당하며, 계산 정밀도를 높이면 일반 CETA로 재현이 가능할 것입니다.

추가로, 모델 A-F-B-4 아치는 RFI가 -3.16% 인데 CETA가 아닌 CTDAice 타입으로 되어있습니다. 이것은 작성하려는 곡선이 CTDA와 대단히 유사하므로 CETA로 작성하기에는 너무 큰 R값이 필요하기에 근사 곡선을 작성하였다는 의미입니다. 그러나 모델 A-B-S-4 아치는 계산에 실패하여 근사 곡선을 작성한 것으로 판단할 수 있습니다.

(※ 표에는 없지만, 기준이 되는 CTDA와 maxCHTA의 AFI는 아치의 폭/높이 비율에 영향을 받는 것으로 보입니다. 일반적으로 폭에 비해 높이가 높을수록 AFI가 커지는 경향이 있습니다.)

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm^2]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
A	F	B	1	CHTA	438.41	358.32	333.05	392.56	66.71	54.52	50.68	59.73	42.76	0.010
			2	CHTA	491.11	412.68	372.66	417.85	67.08	56.37	50.90	57.08	6.59	0.010
			3	CHTA	397.35	345.53	308.31	368.65	67.67	58.84	52.50	62.78	44.61	0.010
			4	CTDAice	619.02	514.80	472.00	513.44	67.13	55.83	51.19	55.68	-3.16	1E-09
			5	CHTA	562.90	494.16	456.61	549.70	61.56	54.04	49.93	60.11	80.80	0.010
		S	1	CHTA	433.54	354.45	313.96	395.93	66.75	54.58	48.34	60.96	52.45	0.010
			2	CHTA	487.98	410.23	363.44	419.56	67.11	56.41	49.98	57.70	12.01	0.010
			3	CHTA	395.82	344.44	307.84	371.94	67.66	58.88	52.62	63.58	53.53	0.010
			4	CETA	628.53	522.23	510.58	513.28	67.08	55.74	54.49	54.78	-76.77	0.010
			5	CHTA	572.09	502.94	452.45	553.33	61.38	53.96	48.55	59.37	72.86	0.010
	B	S	1	CHTA	314.46	278.60	246.86	302.66	60.37	53.48	47.39	58.10	67.10	0.010
			2	CETA	440.23	365.05	331.73	362.06	67.08	55.63	50.55	55.17	-8.98	0.010
			3	CHTA	341.93	295.66	266.04	312.88	67.74	58.58	52.71	61.99	37.20	0.010
			4	CTDAice	553.27	456.96	420.23	447.18	67.14	55.45	51.00	54.27	-26.62	1E-09
			5	nCHTAce	421.79	375.45	336.56	437.57	59.68	53.12	47.62	61.91	134.05	0.010
		B	1	CHTA	311.22	275.57	246.63	300.40	60.45	53.53	47.90	58.35	69.65	0.010
			2	CTDAice	438.54	363.79	326.70	363.69	67.08	55.65	49.98	55.63	-0.29	1E-09
			3	CHTA	339.83	294.09	267.57	312.68	67.75	58.63	53.34	62.34	40.65	0.010
			4	CETA	552.70	456.27	404.97	446.20	67.19	55.46	49.23	54.24	-19.63	0.010
			5	nCHTAce	420.57	374.44	335.60	441.89	59.68	53.13	47.62	62.70	146.21	0.010
B	F	B	1	CHTA	657.20	542.12	489.52	590.90	67.03	55.30	49.93	60.27	42.39	0.012
			2	CETA	806.32	691.02	625.85	685.86	67.57	57.90	52.44	57.47	-7.91	0.012
			3	CHTA	569.58	499.91	443.22	544.19	67.33	59.10	52.40	64.33	63.57	0.012
			4	CTDAce	946.67	791.33	727.81	793.72	67.33	56.28	51.77	56.45	1.54	1E-09
			5	CHTA	831.36	726.57	704.83	819.39	62.04	54.22	52.60	61.14	88.58	0.012
		S	1	CHTA	660.86	545.17	524.07	586.30	66.99	55.26	53.12	59.43	35.55	0.012
			2	CHTA	801.62	687.14	630.27	693.67	67.61	57.96	53.16	58.51	5.70	0.012
			3	CHTA	578.41	506.63	452.45	545.83	67.31	58.96	52.65	63.52	54.61	0.012
			4	CHTA	948.94	792.76	730.34	800.68	67.36	56.27	51.84	56.83	5.07	0.012
			5	CHTA	833.67	728.67	667.01	823.77	62.02	54.21	49.62	61.28	90.58	0.012
	B	S	1	CHTA	462.98	406.17	366.75	452.99	61.60	54.04	48.80	60.27	82.41	0.012
			2	CHTA	593.16	492.56	453.88	506.47	67.31	55.89	51.50	57.47	13.83	0.012
			3	CHTA	482.01	412.57	371.82	452.63	67.34	57.64	51.94	63.23	57.69	0.012
			4	CHTA	801.57	658.84	633.13	673.44	67.30	55.32	53.16	56.54	10.23	0.012
			5	nCHTAce	613.56	544.99	491.23	614.57	59.94	53.25	47.99	60.04	101.48	0.012
		B	1	CHTA	464.43	407.62	373.33	453.54	61.56	54.03	49.48	60.11	80.82	0.012
			2	CHTA	597.77	496.29	476.69	507.53	67.26	55.84	53.64	57.11	11.07	0.012
			3	CHTA	482.84	413.46	367.74	447.98	67.29	57.62	51.25	62.43	49.76	0.012
			4	CHTA	803.26	659.86	605.37	677.63	67.33	55.31	50.74	56.80	12.39	0.012
			5	nCHTAce	617.28	548.99	512.77	623.45	59.84	53.22	49.71	60.44	109.03	0.012

Table 9: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5(1/2). M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance(for arch width, height, and distance to fullness control point).

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm ²]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
C	F	S	1	CHTA	1601.13	1403.81	1290.47	1495.07	61.73	54.12	49.75	57.64	46.25	0.020
			2	CHTA	1751.12	1454.56	1306.96	1468.41	67.08	55.72	50.06	56.25	4.67	0.020
			3	CHTA	1529.66	1305.71	1153.25	1398.67	67.53	57.64	50.91	61.75	41.51	0.020
			4	CHTA	2283.76	1915.45	1693.04	1953.72	65.35	54.81	48.45	55.91	10.39	0.020
			5	nCHTAce	2228.60	1978.54	1791.83	2240.74	60.19	53.43	48.39	60.52	104.85	0.020
		B	1	CHTA	1623.55	1423.53	1282.79	1500.40	61.65	54.06	48.71	56.98	38.43	0.020
			2	CHTA	1742.57	1447.54	1311.77	1461.02	67.11	55.75	50.52	56.27	4.57	0.020
			3	CHTA	1523.98	1302.14	1149.38	1395.19	67.49	57.67	50.90	61.79	41.95	0.020
			4	CHTA	2285.07	1917.31	1710.34	1953.84	65.32	54.81	48.89	55.85	9.93	0.020
			5	CHTA	2259.07	2006.80	1857.80	2247.26	60.09	53.38	49.42	59.78	95.32	0.020
	B	B	1	CHTA	1264.33	1121.80	1065.03	1197.11	60.19	53.41	50.70	56.99	52.83	0.020
			2	CHTA	1511.29	1231.80	1195.99	1243.91	67.17	54.75	53.16	55.29	4.33	0.020
			3	CHTA	1261.20	1056.34	982.03	1172.06	67.36	56.42	52.45	62.60	56.49	0.020
			4	CHTA	1717.17	1508.94	1447.62	1566.08	61.47	54.01	51.82	56.06	27.44	0.020
			5	nCHTAce	1709.82	1528.82	1494.61	1711.93	59.02	52.77	51.59	59.09	101.17	0.020
		S	1	CHTA	1261.65	1118.90	1026.17	1205.85	60.23	53.42	48.99	57.57	60.91	0.020
			2	CETA	1538.47	1252.59	1142.26	1237.70	67.14	54.66	49.85	54.01	-13.50	0.020
			3	CHTA	1290.88	1078.21	978.35	1174.37	67.38	56.28	51.06	61.29	45.22	0.020
			4	CHTA	1723.51	1515.20	1390.93	1574.91	61.42	54.00	49.57	56.12	28.67	0.020
			5	CHTA	1722.60	1540.19	1468.92	1708.31	59.00	52.75	50.31	58.51	92.17	0.020
D	F	B	1	CHTA	451.65	367.52	328.91	374.40	67.11	54.61	48.87	55.63	8.17	0.010
			2	CETA	483.63	405.21	360.98	378.82	67.52	56.57	50.40	52.89	-59.67	0.010
			3	CHTA	395.24	344.83	303.73	350.43	68.04	59.36	52.29	60.33	11.10	0.010
			4	nCETAice	635.58	525.72	466.51	492.08	67.38	55.74	49.46	52.17	-56.81	0.010
			5	CHTA	588.83	516.99	466.95	535.93	61.55	54.04	48.81	56.02	26.37	0.010
		S	1	CHTA	462.01	375.35	337.06	390.37	67.05	54.47	48.92	56.65	17.33	0.010
			2	CETA	492.63	412.91	373.60	398.44	67.54	56.61	51.22	54.62	-36.81	0.010
			3	CETA	406.70	355.01	321.32	350.25	68.02	59.38	53.74	58.58	-14.11	0.010
			4	CETA	643.71	530.87	483.33	519.53	67.40	55.59	50.61	54.40	-23.84	0.010
			5	CHTA	594.97	519.89	459.73	571.06	62.05	54.22	47.94	59.55	68.15	0.010
	B	S	1	CHTA	333.72	294.67	261.36	307.40	60.81	53.70	47.63	56.02	32.61	0.010
			2	CHTA	417.73	345.45	312.43	350.65	67.29	55.65	50.33	56.48	7.18	0.010
			3	CHTA	352.07	302.90	275.33	311.84	67.87	58.39	53.08	60.12	18.20	0.010
			4	CHTA	552.46	450.16	411.22	467.57	67.24	54.79	50.05	56.91	17.02	0.010
			5	nCHTAce	364.28	326.52	307.78	382.66	58.67	52.59	49.57	61.63	148.69	0.010
		B	1	CHTA	313.10	276.50	250.79	290.28	60.79	53.68	48.69	56.36	37.66	0.010
			2	CETA	402.63	333.53	307.95	321.49	67.37	55.80	51.52	53.79	-47.07	0.010
			3	CHTA	349.46	302.07	278.52	302.97	67.89	58.68	54.11	58.86	1.90	0.010
			4	CETA	545.03	445.20	403.43	432.90	67.18	54.88	49.73	53.36	-29.46	0.010
			5	CHTA	346.93	310.82	286.68	317.10	58.74	52.63	48.54	53.69	17.39	0.010

Table 10: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5(2/2). M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance(for arch width, height, and distance to fullness control point).

8.2.4 오차 분석

재현 아치와 모델 아치의 오차는 다음과 같이 정의합니다. 먼저 두 아치의 정점을 일치시켜 겹친 뒤, 두 곡선 사이의 면적인 오차 면적(mm^2)을 구합니다. 그 다음, 이 오차 면적을 모델 아치의 길이(mm)로 나누어 '단위 길이당 오차 (mm^2/mm)'를 계산합니다. 이 값이 작을수록 두 곡선은 더 유사하다고 판단하며, 0이면 완전히 동일한 곡선입니다. 모든 아치에 대해 단위 길이당 오차를 계산하고, 이를 바탕으로 그룹별 및 전체 오차 평균(mm)과 표준편차(mm)를 구합니다.

오차 면적은 두 곡선이 만드는 폐곡선을 적분하여 구합니다. 이때, 재현 과정에서 설정한 허용 오차 때문에 두 아치의 폭과 높이에 미세한 차이가 발생하고, 이로 인해 아치 끝부분이 약간 어긋나게 됩니다. 이 어긋난 부분에서는 폐곡선이 만들어지지 않으므로, 폭이 더 짧은 쪽 끝에서 수선을 그어 닫힌 도형을 만든 뒤 적분을 실행했습니다. 계산에는 별도로 제작한 프로그램을 사용했습니다.

Figure 69는 두 곡선이 만드는 폐곡선, 즉 오차 면적을 보여줍니다. 검은색 곡선이 모델 아치, 붉은색이 재현 아치일 때, 녹색 빗금 영역이 바로 '오차 면적'입니다.

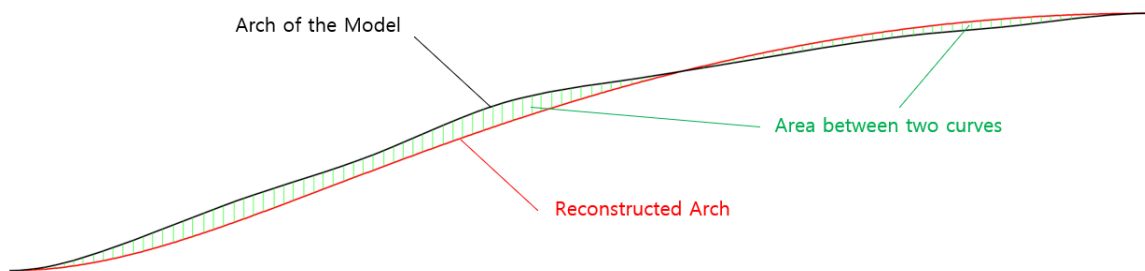


Figure 69: Area between the two curves(error area)

개별 아치의 오차를 구한 뒤에는, 1번, 2번, 3번 등 위치별로 그룹을 묶어 각 그룹의 오차 평균을 구합니다. 위치에 따라 아치의 형태적 성격이 다르기 때문입니다. 그룹별 및 전체 오차 평균을 확인하면, 재현 방법의 신뢰성을 1차적으로 가늠할 수 있습니다.

다음으로 표준편차를 확인합니다. 평균값만으로는 데이터의 분포를 알 수 없기 때문입니다. 예를 들어, 두 집단 [-5, -3, 3, 5]와 [-1, 0, 0, 1]의 평균은 모두 0이지만, 첫 번째 집단이 두 번째 집단보다 데이터가 평균에서 훨씬 멀리 흩어져 있습니다. 표준편차는 데이터가 평균을 중심으로 얼마나 퍼져 있는지를 나타내는 척도입니다. 표준편차가 작을수록 데이터가 평균값 주위에 모여있다는 뜻입니다. 따라서 표준편차를 함께 확인함으로써 재현 방법의 신뢰성을 더 깊이 있게 평가할 수 있습니다. (※ 표본 표준편차를 사용하고, 괄호 안에 모집단 표준편차를 병기했습니다.)

Table 11는 단위 길이당 오차와 표준편차를, Table 12는 각 아치 쌍의 원본 데이터를 그룹별로 정리한 것입니다. 여기서 가장 두드러지는 특징은 1번 아치의 오차가 가장 작다는 점입니다. 6번 아치를 제외하면, 오차는 1번 < 2번 < 4번 < 3번 < 5번 아치 순으로 커집니다. 표준편차도 이와 유사한 경향을 보여, 1, 2번 아치의 변형이 가장 적음을 알 수 있습니다.

앞판과 뒷판을 비교하면, 전반적으로 뒷판의 오차가 더 작습니다. 이는 뒷판의 변형이 앞판보다 적기 때문으로 보입니다. 한편, 6번 아치는 재현 방법이 복잡했음에도 불구하고 다른 아치들보다 오히려 오차가 더 작게 나타났습니다. 전체 오차 평균은 0.2 미만이며, 특히 6번 아치는 0.161이라는 만족스러운 결과를 보였습니다. 표준편차 역시 0.1 미만의 작은 값으로, 재현 결과가 비교적 균일함을 보여줍니다.

원본 모델의 불규칙한 표면, 플레이트 변형, 계산상 허용 오차 등을 모두 고려할 때, 이 정도의 오차 평균과 표준편차는 본 재현 방법이 충분히 높은 신뢰도를 가지고 있음을 증명합니다.

Group	Arch	Error per unit length [mm ² /mm]				Std. Dev. SD (PSD)					
		Min.	Max.	Avg.							
1	Front-1st	0.044	0.261	0.147	0.141	0.184	0.180	0.083	0.066	0.102 (0.101)	0.097 (0.096)
2	Back-1st	0.043	0.177	0.134				0.050			
3	Front-2nd	0.089	0.391	0.199	0.183			0.111	0.096		
4	Back-2nd	0.043	0.293	0.167				0.082			
5	Front-3rd	0.107	0.325	0.213	0.201			0.083	0.094		
6	Back-3rd	0.062	0.385	0.190				0.108			
7	Front-4th	0.086	0.326	0.181	0.194			0.098	0.122		
8	Back-4th	0.062	0.429	0.207				0.148			
9	Front-5th	0.088	0.495	0.206	0.203			0.122	0.121		
10	Back-5th	0.055	0.379	0.199				0.129			
11	Front-6th-U	0.111	0.159	0.127	0.154	0.161	0.021	0.052	0.065 (0.063)		
12	Back-6th-U	0.104	0.257	0.181			0.063				
13	Front-6th-L	0.084	0.296	0.178	0.168		0.093	0.079			
14	Back-6th-L	0.060	0.236	0.157			0.074				

Table 11: Error data per unit length by group

Group	Arch	Error Area [mm ²]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm ² /m]	Group	Arch	Error Area [mm ²]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm ² /m]
1	A-F-1-B	10.226	76.149	0.134	7	A-F-4-B	7.460	79.890	0.093
	A-F-1-S	11.505	75.283	0.153		A-F-4-S	6.994	81.163	0.086
	B-F-1-B	3.812	86.202	0.044		B-F-4-B	23.782	95.154	0.250
	B-F-1-S	3.973	86.723	0.046		B-F-4-S	24.189	95.354	0.254
	C-F-1-B	28.723	160.600	0.179		C-F-4-B	14.760	170.583	0.087
	C-F-1-S	40.152	158.215	0.254		C-F-4-S	17.417	170.388	0.102
	D-F-1-B	19.892	76.275	0.261		D-F-4-B	20.146	81.371	0.248
	D-F-1-S	8.581	78.424	0.109		D-F-4-S	27.047	83.068	0.326
2	A-B-1-B	11.821	76.272	0.155	8	A-B-4-B	10.492	77.900	0.135
	A-B-1-S	11.069	76.988	0.144		A-B-4-S	8.251	77.976	0.106
	B-B-1-B	14.352	86.266	0.166		B-B-4-B	5.905	95.017	0.062
	B-B-1-S	15.008	85.928	0.175		B-B-4-S	7.156	94.863	0.075
	C-B-1-B	27.631	156.323	0.177		C-B-4-B	70.837	166.484	0.425
	C-B-1-S	22.145	155.892	0.142		C-B-4-S	71.665	167.218	0.429
	D-B-1-B	5.033	74.509	0.068		D-B-4-B	13.998	81.420	0.172
	D-B-1-S	3.327	76.730	0.043		D-B-4-S	20.894	82.923	0.252
3	A-F-2-B	6.084	68.299	0.089	9	A-F-5-B	18.311	94.900	0.193
	A-F-2-S	7.458	67.836	0.110		A-F-5-S	16.584	96.689	0.172
	B-F-2-B	26.978	78.806	0.342		B-F-5-B	21.105	112.430	0.188
	B-F-2-S	30.649	78.291	0.391		B-F-5-S	18.924	112.799	0.168
	C-F-2-B	15.051	134.954	0.112		C-F-5-B	18.517	209.786	0.088
	C-F-2-S	21.449	135.660	0.158		C-F-5-S	30.302	206.642	0.147
	D-F-2-B	13.124	66.496	0.197		D-F-5-B	47.980	96.976	0.495
	D-F-2-S	12.714	67.096	0.189		D-F-5-S	19.133	95.194	0.201
4	A-B-2-B	7.055	68.277	0.103	10	A-B-5-B	6.117	94.354	0.065
	A-B-2-S	10.504	68.531	0.153		A-B-5-S	7.377	94.640	0.078
	B-B-2-B	14.923	78.396	0.190		B-B-5-B	37.108	112.574	0.330
	B-B-2-S	16.478	77.747	0.212		B-B-5-S	35.063	111.712	0.314
	C-B-2-B	33.017	137.652	0.240		C-B-5-B	36.802	203.237	0.181
	C-B-2-S	41.008	140.188	0.293		C-B-5-S	38.955	204.817	0.190
	D-B-2-B	6.784	64.402	0.105		D-B-5-B	5.144	94.144	0.055
	D-B-2-S	2.874	66.540	0.043		D-B-5-S	36.946	97.361	0.379
5	A-F-3-B	11.216	52.666	0.213	11	A-F-6-U	27.506	173.469	0.159
	A-F-3-S	12.161	52.520	0.232		B-F-6-U	23.877	199.364	0.120
	B-F-3-B	14.061	62.691	0.224		C-F-6-U	45.537	378.590	0.120
	B-F-3-S	10.806	63.564	0.170		D-F-6-U	21.605	194.149	0.111
	C-F-3-B	35.778	110.249	0.325	12	A-B-6-U	32.973	169.548	0.194
	C-F-3-S	35.522	110.583	0.321		B-B-6-U	36.110	214.484	0.168
	D-F-3-B	5.465	51.155	0.107		C-B-6-U	92.649	360.992	0.257
	D-F-3-S	5.879	51.870	0.113		D-B-6-U	20.094	193.230	0.104
6	A-B-3-B	8.207	49.235	0.167	13	A-F-6-L	21.401	168.116	0.127
	A-B-3-S	7.904	49.584	0.159		B-F-6-L	40.678	197.677	0.206
	B-B-3-B	3.866	62.371	0.062		C-F-6-L	106.601	360.537	0.296
	B-B-3-S	4.458	62.167	0.072		D-F-6-L	12.551	148.740	0.084
	C-B-3-B	30.750	108.894	0.282	14	A-B-6-L	24.118	165.571	0.146
	C-B-3-S	42.876	111.394	0.385		B-B-6-L	33.268	179.422	0.185
	D-B-3-B	7.628	49.617	0.154		C-B-6-L	86.874	368.659	0.236
	D-B-3-S	12.091	50.768	0.238		D-B-6-L	9.020	149.513	0.060

Table 12: Raw data of error per unit length by group. Abbreviation: Model(A/B/C/D)-Plate(Front/Back)-Arch N.(1/2/3/4/5/6)-Side(Bass bar/Sound post or Upper/Lower))

9 악기 제작에의 적용

지금까지 네 가지 모델의 아치를 재현하는 과정을 살펴보았습니다. 이 연구의 궁극적인 목적은, 연구에 사용된 모델과 크기가 다른 악기에도 스트라디바리 아치를 적용하는 방법을 찾는 것입니다. 따라서 이번 장에서는 아치의 폭과 높이가 다를 때 이 방법을 어떻게 적용하는지 알아보겠습니다. 이전과 같이 1~5번 아치와 6번 아치를 나누어 설명합니다.

9.1 1-5번 아치

아치를 작성하기 위해 필요한 파라미터는 아치의 폭과 높이 및 충만도 제어점의 위치입니다. 폭은 플레이트의 넓이와 에지 폭에 따라 제작가가 직접 결정합니다. 높이는 6번 아치를 만들면 자동으로 결정됩니다. 따라서 충만도 제어점의 위치만 알면 아치를 작성할 수 있습니다.

스트라디바리 아치의 형태를 재현하는 것이 목표이므로, 기준이 될 ‘표준 모델’이 필요합니다. 이 표준 모델은 새로운 악기의 충만도 제어점의 위치를 계산하는 척도가 됩니다. 즉, 아치 끝점에서의 상대적인 거리를 비례적으로 적용하는 것입니다.

예를 들어 1번 아치의 표준 모델을 ‘모델 A의 앞판 좌측 1번 아치’로 정했다고 가정해 봅시다. 이 표준 모델에서 충만도 제어점은 아치 끝점에서 가로(x축)로 25.91, 세로(y축)로 3.9 떨어져 있습니다. 만약 표준 모델보다 폭이 1.1배, 높이가 0.9배인 새 아치를 만든다면, 충만도 제어점의 위치는 다음과 같이 계산됩니다.

가로 위치: $25.91 \times 1.1 = 28.50$, 세로 위치: $3.9 \times 0.9 = 3.51$

이렇게 계산된 위치를 지나는 트로코이드 곡선을 만들면 됩니다. 실제 적용 시에는 표준 모델의 폭과 높이에 대한 충만도 제어점의 위치 비율을 미리 구해두고, 이 비율을 새로 만들 악기의 폭과 높이에 곱해주면 됩니다. 예를 들어, 표준 모델의 충만도 제어점 위치 비율이 다음과 같다고 가정합니다.

$$\begin{aligned} \text{x축 방향 위치 비율(Rate_Zx)} &= \frac{(\text{아치 끝단에서 충만도 제어점까지의 x축 거리})}{(\text{아치 절반 폭})} \\ &= \frac{25.91}{75.53} \\ &= 0.3430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y축 방향 위치 비율(Rate_Zy)} &= \frac{(\text{아치 끝단에서 충만도 제어점까지의 y축 거리})}{(\text{아치 높이})} \\ &= \frac{7.2 - 3.3}{12.0 - 3.3} = \frac{3.9}{8.7} \\ &= 0.3793 \end{aligned}$$

이 비율을 이용해, 만들려는 아치(폭 81.0mm, 높이 7.8mm)의 충만도 제어점 위치를 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 \text{아치 끝단에서 충만도 제어점까지의 } x\text{축 거리} &= \text{아치 폭} * \text{Rate_Zx} \\
 &= 81.0 * 0.3430 \\
 &= 27.783
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{아치 끝단에서 충만도 제어점까지의 } y\text{축 거리} &= \text{아치 높이} * \text{Rate_Zy} \\
 &= 7.8 * 0.3793 \\
 &= 2.9585
 \end{aligned}$$

이처럼 각 아치의 충만도 제어점 위치 비율만 알고 있으면, 악기의 폭과 높이가 달라져도 표준 모델과 동일한 비율의 충만도를 가진 아치를 만들 수 있습니다.

9.2 6번 아치

6번 아치는 모양 제어점이 추가되므로, 아치의 모양 자체를 결정하는 정보도 필요합니다. 1~5번 아치는 세 점(정점, 끝점, 충만도 제어점)을 통과하는 트로코이드 곡선이 단 하나 뿐이지만 6번 아치는 이 세 점을 통과하는 곡선이 무수히 많으므로 형태를 특정할 다음의 추가 변수가 필요합니다.

- 3차 다항 곡선의 진폭 : 아치 높이에 비례, 충만도 제어점과 마찬가지로, 표준 모델의 아치 높이에 대한 진폭의 비율을 계산하여 적용
- 손잡이 방향과 지수값 : 아치의 폭이나 높이에 상관없이 모양을 결정하는 고유값이므로, 표준 모델의 값을 그대로 사용

예를 들어, 표준 모델(모델 A 앞판 6번 상단부, 높이 15.1, 진폭 -9.1)의 3차 다항 곡선의 진폭 비율은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 \text{3차 다항 곡선의 진폭 비율(Rate_bamp)} &= \frac{\text{(3차 다항 곡선의 진폭)}}{\text{(아치 높이)}} \\
 &= \frac{-7.313}{(15.5 - 3.3)} \\
 &= -0.5946
 \end{aligned}$$

새로 작성하는 아치 높이가 11.9일 때, 여기에 사용될 3차 다항 곡선의 진폭은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 \text{3차 다항 곡선의 진폭} &= \text{(아치 높이)} * \text{(Rate_bamp)} \\
 &= 11.9 * (-0.5946) = -7.0757
 \end{aligned}$$

(※ 3차 다항 곡선의 진폭은 항상 음수이며 숫자 앞의 마이너스 기호(-)는 손잡이 방향을 의미합니다.)

결론적으로, 표준 모델의 3차 다항 곡선의 진폭과 손잡이 방향(-7.0757), 지수값(-0.613) 및 충만도 제어점의 위치 (계산 방법은 1~5번 아치와 동일)를 알면 아치 폭과 높이가 바뀌어도 표준 모델과 같은 비율의 충만도와 모양을 가진 아치를 만들 수 있습니다.

10 결론 및 고찰

스트라디바리 아치는 위치별로 부풀어 오른 정도, 즉 ‘충만도(Fullness)’가 다릅니다. 분석 결과, 2, 4번 아치는 충만도가 작은 반면, 5번 아치는 크고, 6번 아치는 매우 큰 특징을 보였습니다. 이처럼 다양한 충만도를 구현하기 위해서는 아치의 폭과 높이를 유지하면서 충만도를 조절할 수 있어야 합니다.

기준에 유력한 모델로 알려진 커테이트 트로코이드(Curtate Trochoid) 곡선은 충만도를 조절할 수 없으므로 스트라디바리 아치로 사용할 수 없습니다. 그러나 어떤 원이 다른 원에 내접 또는 외접하면서 구를 때 생성되는 커테이트 하이포트로코이드(Curtate Hypotrochoid)와 커테이트 에피트로코이드(Curtate epitrochoid) 곡선은 충만도를 조절할 수 있으며, 이들로 스트라디바리 아치를 재현할 수 있다는 사실을 확인하였습니다.

그러나 위의 두개의 곡선도 충만도 조절에는 한계가 있으며, 그 한계를 벗어난 경우에는 ‘패턴 곡선’을 이용하여 만든 ‘근사 곡선’으로 재현할 수 있습니다. 이때는 지수 왜곡 카테너리 곡선을 패턴으로 사용하며, 이 곡선의 좌표값에 따라 트로코이드 곡선을 변형하여 근사 곡선을 얻을 수 있습니다. 형태가 독특한 6번 아치는 지수 왜곡 3차 다항 곡선과 카테너리 곡선을 패턴으로 하여 커테이트 트로코이드를 변형하여 재현하였습니다.

위 방법으로 재현한 아치들은, 이미지와 파라미터, 충만도 및 오차 분석을 통해 원본 아치와 대단히 유사하다는 것이 확인되었습니다.

폭과 높이가 각기 다른 아치들의 충만도를 보다 객관적이고 정량적으로 비교하기 위해 ‘절대 충만도 지수(Absolute Fullness Index)’와 ‘상대 충만도 지수(Relative Fullness Index)’라는 새로운 지표를 도입했습니다. 이 지표들을 통해 재현 아치의 충만도 특성을 정량적화할 수 있었으며, 그 결과는 원본 스트라디바리 아치의 고유한 특성을 나타낸다고 할 수 있습니다.

재현된 전체 아치의 단위 길이당 오차 평균은 약 $0.180(mm^2/mm)$, 표본 표준편차는 0.097로 나타났습니다. 모델 아치의 불규칙한 표면과 뒤틀림을 고려할 때, 이는 본 재현 기법의 정확성과 신뢰도가 매우 높다는 점을 시사합니다. 만약 뒤틀림이 없고 매끄러운 좌우 평균 곡선을 대상으로 했다면 오차는 이보다 훨씬 줄어들 것으로 예상됩니다.

본 재현 방법을 실제 악기 제작에 적용하려면 기준이 될 표준 모델이 필요합니다. 제작자는 이 표준 모델의 충만도 제어점 위치 비율과 패턴 곡선 파라미터 비율을 이용해, 자신이 원하는 크기의 악기에서도 표준 모델과 동일한 비율의 충만도를 가진 아치를 만들 수 있습니다. 따라서 이 방법의 성공적인 활용을 위해서는, 뒤틀림이 적고 충분한 데이터를 추출할 수 있는 이상적인 표준 모델을 확보하는 것이 무엇보다 중요합니다.

본 연구에도 아쉬움이 있습니다. 첫째, 표본 수가 적다는 점입니다. 이는 재현 과정의 신뢰도뿐만 아니라, 부록에서 다룬 에지 폭 결정에도 영향을 줄 수 있는 중요한 문제입니다. 둘째, 6번 아치의 재현 방법이 다소 복잡하고 직관적이지 않다는 점입니다. 향후 더 간결하고 직관적인 방법을 찾기 위한 후속 연구가 필요합니다. 셋째, 이 재현 방법은 간단한 도구만으로는 구현하기 어렵다는 점입니다. 다만 이 문제는 추후 배포될 전용 프로그램을 통해 해결할 수 있을 것입니다.

300여 년 전 크레모나에서 스트라디바리가 어떤 의도와 방법으로 이런 아치를 만들었는지는 알 수 없습니다. 하지만 본 연구는 커테이트 하이포르코이드, 커테이트 에피트로코이드 및 근사 곡선을 활용하면, 그의 결과물과 매우 유사한 아치를 재현할 수 있다는 사실을 분명히 보여줍니다.

컴퓨터가 없던 시대에 경험만으로 만들어진 스트라디바리의 아치가 현대의 정밀한 수학적 계산과 거의 일치한다는 사실은 본 연구를 진행한 저에게는 너무도 큰 충격이었습니다. 본 연구를 통해, 스트라디바리 아치라는 이 아름다운 선물이 더 많은 이에게 전해질 수 있기를 바랍니다.

11 부록

11.1 아치 패턴 분석

(※ 이 내용은 표본 수가 적고 본인의 추측이 포함되어 부정확할 수 있음을 미리 밝힙니다.)

재현할 아치가 정의되면, 더 깊이 있는 재현을 위해 아치 형태를 분석해야 합니다. 이 분석은 등고선 데이터를 이용해 그 패턴을 파악하는 과정입니다. 이를 위해 본 장에서는 ‘등고맵(Contour map)’이라는 새로운 도구를 도입합니다. 등고맵 분석을 통해 스트라디바리 아치의 특징을 더 자세히 파악할 수 있으며, 이는 실제 악기 제작을 위한 아치 설계에 큰 도움이 될 것입니다.

이러한 연구의 궁극적인 목표는 현존하는 스트라디바리 아치를 그대로 복제하는 것이 아닙니다. 악기가 뒤틀리기 전의 모습, 즉 제작 초기 상태를 재현하는 것입니다. 이는 결국 스트라디바리의 제작 의도를 파악하는 과정이며, 여기에는 논리적인 추측과 상상이 필요합니다. 이 장에서는 그러한 추론 과정을 돕는 몇 가지 방법을 제시합니다.

아치 재현시 고려할 점은 크게 두가지로 나눌 수 있습니다. 첫째는 개별 아치를 얼마나 충실히 재현하는가이고, 둘째는 아치들 사이의 관계를 얼마나 잘 반영하는가입니다. 재현된 아치는 원본과 미세한 차이를 가질 수밖에 없습니다. 이 차이는 개별 아치만 봐서는 잘 드러나지 않지만, 다른 아치와의 관계 속에서는 더 뚜렷하게 보일 수 있습니다. 따라서 아치 간의 상호 관계까지 충실히 재현해야 올바른 재현이라 할 수 있습니다.

아치 간의 상호 관계를 파악하는 가장 일반적인 방법은 전체 등고선을 확인하는 것입니다. 하지만 이는 작업이 어렵고, 관계를 비교하는 데 비효율적일 수 있습니다. 이러한 단점을 극복하기 위해 등고맵이라는 새로운 분석 도구를 도입했습니다. 등고맵은 전체 등고선의 뼈대를 간추린 그림과 이를 일렬로 정렬한 그림으로 구성됩니다.

Figure 70 ‘등고맵-A’는 전체 등고선의 뼈대를 보여줍니다.

- 구성 : 왼쪽은 앞판, 오른쪽은 뒤판을 나타냅니다. 붉은 점은 아치의 끝점과 정점, 검은 점은 등고선의 위치를 의미합니다.
- 중앙 연결선 : 앞판과 뒤판의 동일 순번 등고점을 직선으로 연결하여, 6번 아치의 형태 차이를 한눈에 비교할 수 있게 했습니다. (높이가 다른 등고점은 점선, 높이가 같은 플레이트 끝단은 실선으로 연결)
- 활용 : 점들의 간격으로 아치의 경사를 파악할 수 있습니다. 또한 연결선의 패턴(기울기, 방향 등)을 통해 앞판과 뒤판 6번 아치의 차이와 특징을 빠르게 파악하는 데 유용합니다.

등고맵-A를 통해 6번 아치를 분석해 보면, 앞판은 중앙부가 평평하고 끝으로 갈수록 경사가 급해지는 반면, 뒤판은 전체적으로 완만한 곡선을 이룹니다. 한편, 앞판 6번 아치 상단부의 에지 폭이 유난히 좁아 보이는 등 일부 측정 오차로 의심되는 부분도 관찰됩니다. 이상적인 아치라면 중앙 연결선의 기울기가 점진적으로 변해야 하지만, 6번 아치 하단부에서는 기울기가 조금 불규칙하게 변하는 구간이 있어 아치가 매끄럽지 않음을 시사합니다.

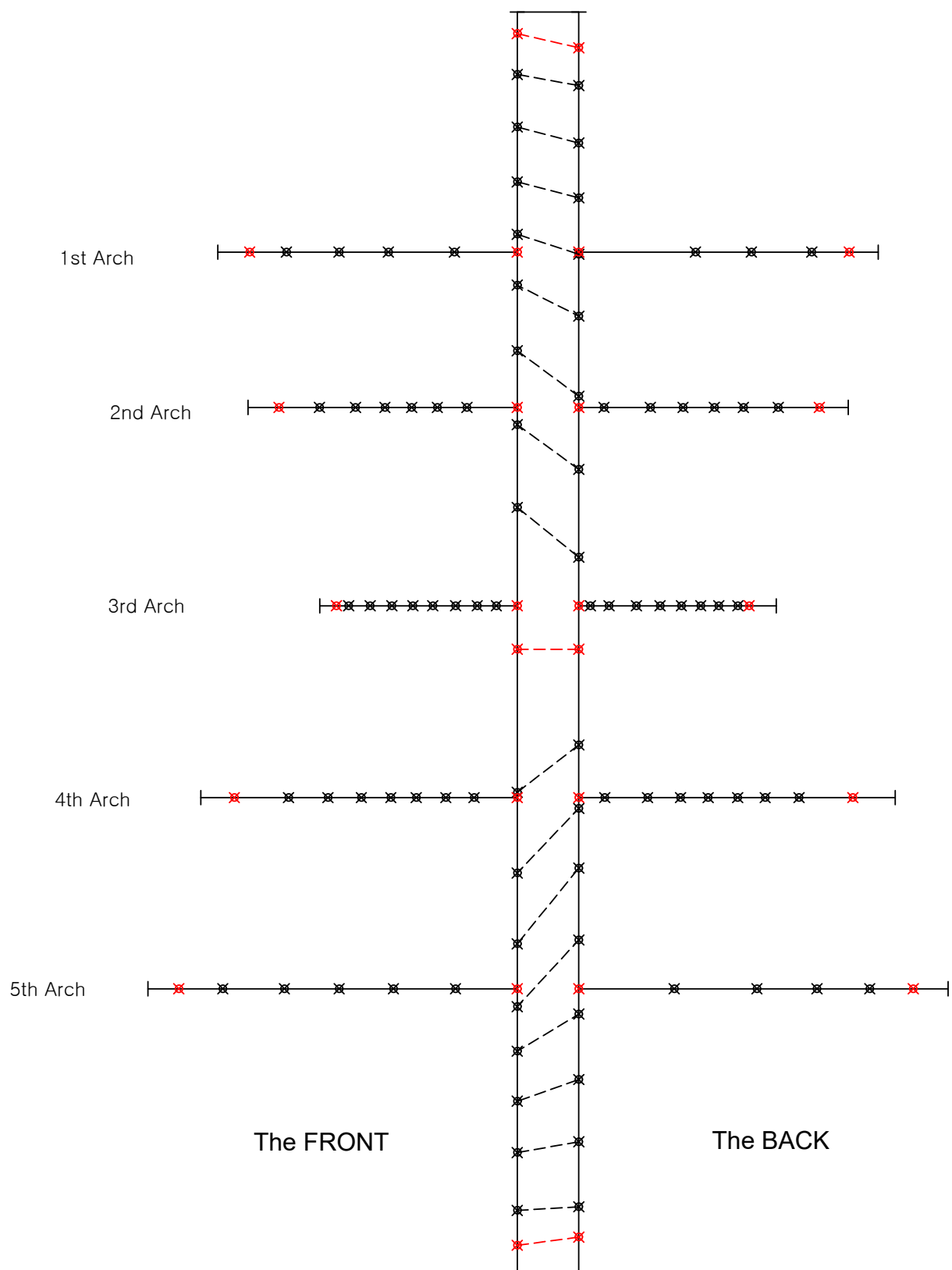


Figure 70: *Contour map(A) of the Model A*

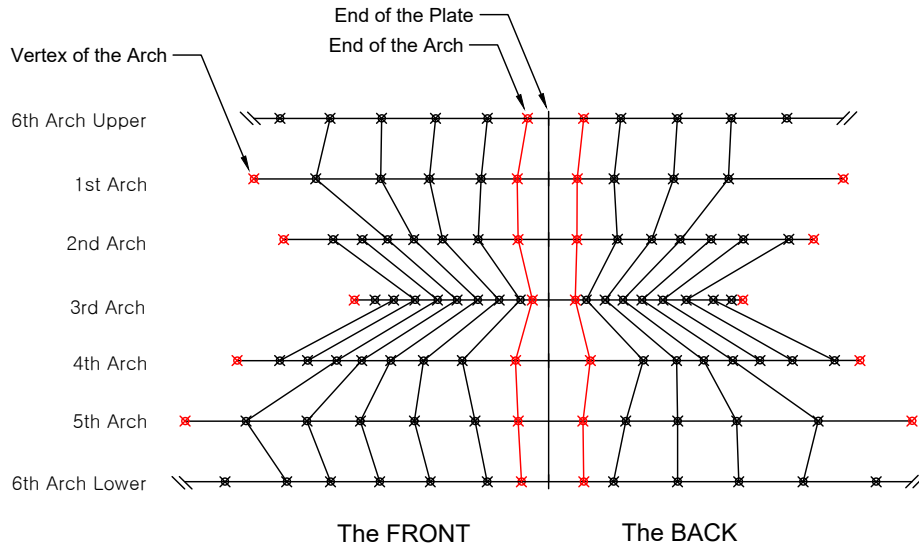


Figure 71: Contour map(B) of the Model A

Figure 71 ‘등고맵-B’는 6개 아치의 등고선 뼈대를 ‘플레이트 끝점’을 기준으로 나란히 정렬한 그림입니다.

- 구성 : 왼쪽은 앞판, 오른쪽은 뒷판입니다. 맵-A와 달리 동일 플레이트 내에서 같은 높이의 등고점을 실선으로 연결했습니다.
- 활용 : 1~5번 아치 패턴을 서로 비교하고, 특히 6번 아치와 1번(상단부), 5번(하단부) 아치의 관계를 파악하는데 유용합니다. 이를 통해 앞판과 뒷판의 패턴 차이도 명확히 알 수 있습니다.

등고맵-B를 분석해 보면, 앞판 1번 아치는 총 4개의 등고점을 가지고 있으나 뒷판은 3개 뿐입니다. 5번 역시 뒷판이 하나 적습니다. 이것은 뒷판의 아치가 앞판보다 더 빨리 높이가 감소했다는 뜻입니다. 6번 상단과 1번, 6번 하단과 5번 아치의 관계를 보면, 전체적으로 앞판의 경우에는 1,5번 보다 6번 아치가 더 급격합니다. 반면 뒷판의 경우에는 서로 비슷하거나 또는 6번이 1,5번 보다 아주 조금 더 완만합니다.

이 그림에서 특히 주목할 부분은 붉은 실선으로 표시된 아치 끝단의 위치입니다. 아치 끝점은 아치의 길이를 결정하므로, 그 위치를 정확히 파악하는 것은 매우 중요합니다.

맵에 나타난 아치 끝점 위치의 불규칙성은 데이터 추출 과정의 오차일 수도 있고, 원본 자료 자체의 측정 오차일 수도 있습니다. 수제 악기의 특성상 아치 끝부분의 경계가 명확하지 않아 정확한 측정이 어렵기 때문입니다.

뒷판 하단부의 연결선 기울기가 불규칙한 것은 측정점의 위치가 부정확하거나 곡선이 매끄럽지 않다는 신호입니다. 또한 뒷판 3번 아치의 에지 폭이 유난히 넓은데, 이는 3번 아치의 충만도가 비정상적으로 작다는 것을 의미하며, 해당 악기 고유의 특성으로 보입니다.

마지막으로, 모델 A, B, C의 에지 폭은 부위별로 다릅니다. 현대 많은 제작자들이 플레이트의 상단부(어퍼 바우트)와 하단부(로어 바우트)는 동일하게 하고, 중앙부(C 바우트)는 그보다 좁게 하는 경우가 많습디만, 자료에서는 그렇지 않음을 알 수 있습니다.

스트라디바리의 정확한 제작 의도는 알 수 없지만, 모델 A, B, C를 통해 다음과 같은 규칙을 추정할 수 있습니다.

L_a : 플레이트 끝에서 아치 끝단까지 거리

L_c : 플레이트 끝에서 첫번째 등고점까지 거리

- 규칙 1. (앞/뒷판) 1~5번 아치에서 L_c 의 크기는 3번<1번<5번<2번<4번 순이다.
- 규칙 2. (앞판) 6번 아치 상단부는 1번 아치보다 경사가 더 급하다.
- 규칙 3. (앞판) 6번 아치 하단부는 5번 아치보다 경사가 더 급하다.
- 규칙 4. (앞판) 6번 아치의 L_a , L_c 는 1, 5번 아치보다 좁다.
- 규칙 5. (뒷판) 6번 아치 상단부는 1번 아치보다 경사가 완만하거나 비슷하다.
- 규칙 6. (뒷판) 6번 아치 하단부는 5번 아치보다 경사가 완만하거나 비슷하다.
- 규칙 7. (뒷판) 6번 아치의 L_a , L_c 는 1, 5번 아치보다 넓다.
- 규칙 8. (앞/뒷판) 전체적으로 L_a , L_c 는 앞판보다 뒷판이 더 넓다.

위 규칙들을 종합하여 앞판의 전체 아치에 대한 L_a (에지 폭)의 순서를 다음과 같이 추론할 수 있습니다.

- 규칙 9. (앞판) L_a 의 크기는 3번<6번(상)<6번(하)<1번<5번<2번<4번 순이다.

뒷판의 경우 표본이 부족하여 단정하기는 어렵지만, 위 규칙들을 바탕으로 다음과 같이 추측할 수 있습니다.

- 규칙 10. (뒷판) L_a 의 크기는 3번<1번<6번(상)<5번<2번<6번(하)<4번 순이다.

최종적으로, 규칙 9,10 을 표로 정리하면 Table 13와 같습니다.

Arch	the FRONT	the BACK
6th Arch-Upper	2	3
1st Arch	4	2
2nd Arch	6	5
3rd Arch	1	1
4th Arch	7	7
5th Arch	5	4
6th Arch-Lower	3	6

Table 13: Order of Edge Width

이러한 에지 폭의 순서를 참고하면, 스트라디바리 아치를 더욱 충실하게 재현하는 데 도움이 될 것입니다.

11.2 모델 A의 원본 아치 추측

본 보고서에서 재현한 아치는 오랜 세월을 거치며 변형된 현재의 모습을 기준으로 합니다. 하지만 우리가 진정으로 알고자 하는 것은 변형이 일어나기 전, 즉 제작자가 의도했던 300년 전의 원형일 것입니다.

이 장에서는 이러한 변형을 보정하고, 논리적 추론을 더해 의심스러운 아치 끝단의 위치를 수정함으로써 300년 전 제작 당시의 모습을 재현합니다. 이를 위해 먼저 플레이트 좌우측 데이터의 평균값을 사용하여 뒤틀림이나 측정 오차를 줄이고, 앞에서 설명한 방식에 따라 예지 폭을 보정하였습니다.

(※ 혹시 모델 A가 ‘메시아’의 데이터라 할지라도 본 재현 결과를 실제 메시아의 데이터와 비교하는 것은 옳지 않습니다. 본 결과는 울퉁불퉁한 곡선의 자료 데이터를 기반으로 추정된 것이기 때문입니다. 실제로 일부 아치들의 높이는 자료의 데이터 보다 최대 0.5(mm)의 오차를 가지고 있습니다.)

재현 결과물은 PDF와 DXF 파일 형식으로 첨부하였으며, 아래는 각 첨부 파일에 대한 설명입니다.

- Front/Back_All_Arches.pdf: 모든 아치와 관련 데이터(bamp:3차 다항 곡선의 진폭과 손잡이 방향, camp:카테너리 곡선의 진폭, pamp:최종 패턴 곡선의 진폭, expo:지수값, tc:허용오차)
- Front/Back_All_Arches_Plate.pdf: 플레이트를 포함한 모든 아치와 관련 데이터
- Front/Back_Contour_Map.pdf: 등고맵
- Contour_Map_Comparison_A/B.pdf: 앞뒤판의 등고맵 비교
- Front/Back_All_Arches.dxf: 모든 아치(출력을 위한 범용 캐드 파일)

(※ 위 첨부 파일은 본인이 제작한 ‘Violin Arch Designer - ver. 1.0.0’ 로 작성되었습니다.)

11.3 줄임 표기와 충만도 영역

표기	설명
TD	(Trochoid) 트로코이드 곡선의 통칭
CTD	(Curtate Trochoid) 동일한 패턴의 곡선이 연속되는 커테이트 트로코이드 곡선
CHT	(Curtate Hypotrochoid) 동일한 패턴의 곡선이 연속되는 커테이트 하이포트로코이드 곡선
CET	(Curtate Epitrochoid) 동일한 패턴의 곡선이 연속되는 커테이트 에피트로코이드 곡선
CTDA	(Curtate Trochoid Arch) CTD 에서 추출한 아치 곡선
CHTA	(Curtate Hypotrochoid Arch) CHT 에서 추출한 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 크다.)
CETA	(Curtate Epitrochoid Arch) CET 에서 추출한 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 작다.)
nCHTA	(near.CHTA) 목표로 하는 CHTA의 근처에 있는 CHTA. (CTDA 보다 충만도가 크다.)
nCETA	(near.CETA) 목표로 하는 CHTA의 근처에 있는 CETA. (CTDA 보다 충만도가 작다.)
maxCHTA	(maximum.CHTA) 아치의 폭, 높이가 고정된 상태에서 존재 가능한 최대 충만도의 CHTA
minCETA	(minimum.CETA) 아치의 폭, 높이가 고정된 상태에서 존재 가능한 최소 충만도의 CETA
nCHTAce	(near.CHTA.catenary.exponential) 목표로 하는 CHTA 를 일반적인 방법으로 작성할 수 없는 경우, 근처의 CHTA 를 카테너리 곡선 및 지수 함수를 이용하여 변환한 근사 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 크다.)
nCETAice	(near.CETA.inverted catenary.exponential) 목표로 하는 CETA 를 일반적인 방법으로 작성할 수 없는 경우, 근처의 CETA 를 뒤집힌 카테너리 곡선 및 지수 함수를 이용하여 변환한 근사 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 작다.)
CTDAce	(CTDA.catenary.exponential) 목표로 하는 CHTA 또는 CETA 를 일반적인 방법으로 작성할 수 없는 경우, CTDA 를 카테너리 곡선 및 지수 함수를 이용하여 변환한 근사 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 크다.)
CTDAice	(CTDA.inverted catenary.exponential) 목표로 하는 CHTA 또는 CETA 를 일반적인 방법으로 작성할 수 없는 경우, CTDA 를 뒤집힌 카테너리 곡선 및 지수 함수를 이용하여 변환한 근사 아치 곡선. (CTDA 보다 충만도가 작다.)
CTDAcecc	(CTDA.cubic polynomial.exponential.catenary) CTDA 를 카테너리 곡선과 3차다항 함수, 지수 함수를 이용하여 변환한 아치 곡선. (6번 아치에만 사용, 근사 곡선 아님)

Table 14: Abbreviations

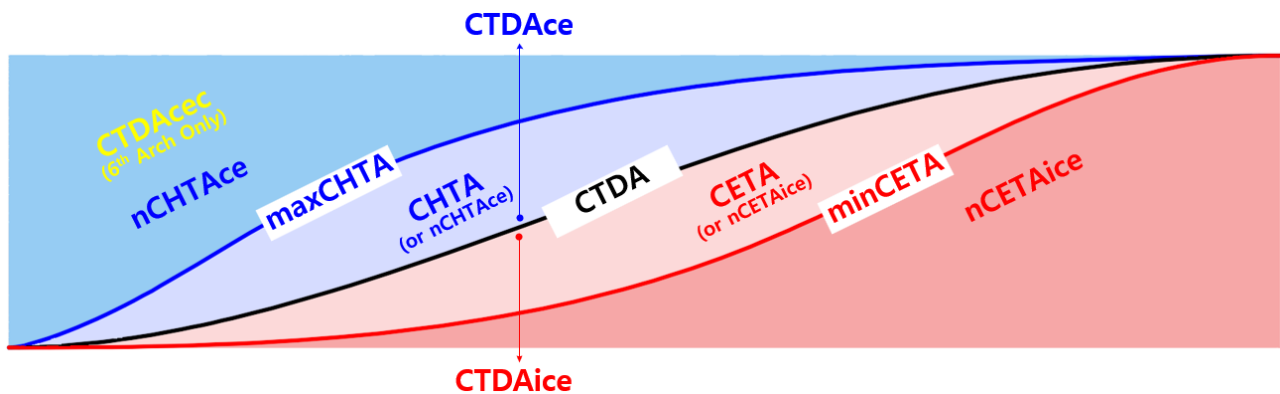


Figure 72: Fullness Zones by Type of Curve

참고 문헌

- [1] S. F. Sacconi, *I 'segreti' di Stradivari*. Cremona: Libreria del Convegno, 1972, pp. 63–83.
- [2] The Strad, *Antonio Stradivari 'Titian' Violin, 1715*, Poster, London, UK, n.d.
- [3] R. M. Mottola, “Comparison of Arching Profiles of Golden Age Cremonese Violins and Some Mathematically Generated Curves,” *Savart Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 172–191, 2011.

참고 사이트

- H.I.S. Violin Atelier (아치 작성 프로그램) – <https://www.hisviolins.com>