

ストラディバリ・アーチの再現

Hwang, Il-Seok*

*H.I.S. Violin Atelier / www.hisviolins.com / hisviolins@gmail.com



2025 年 12 月 08 日

多くの製作者がストラディバリ・アーチの再現を試みっていますが、その原理がまだ解明されていないため、模倣に頼っています。本報告書では、トロコイド曲線を用いてストラディバリ・アーチを再現する方法について説明します。さらに、実際の楽器製作において、アーチの幅と高さに関わらずストラディバリ・アーチを作成する方法についても紹介します。

ストラディバリのアーチに最も類似した曲線は、カーテイト・トロコイド (Curtate Trochoid、以下「CTD」)^{*1}として知られています。しかし、ストラディバリ・アーチの形状は極めて多様であり、そのほとんどが CTD よりもさらに豊かな膨らみを示します。このため、アーチの再現に CTD を用いることは困難です。したがって本報告書では、CTD 曲線が持つ問題点を解決し、ストラディバリ・アーチを忠実に再現する方法を記述します。そのため、次の手順で内容を展開します。

本格的な説明に先立ち、一つの用語を定義します。本報告書は「アーチが膨らんだ程度」に関する研究であり、これは一般的に「アーチのボリューム」と呼ばれています。しかし、ボリューム (volume) は 3 次元の体積を意味する言葉です。本報告書では 2 次元平面のアーチのみを扱うため、ボリュームという表現は適切ではありません。したがって、2 次元平面においてアーチが膨らんだ程度を示す用語として、「充満度 (fullness)」を使用しています。詳細な説明は、Chapter 8.2.3 をご参照ください。

第一に、再現するストラディバリ・アーチが何であることを定義する必要があります。このため、再現対象となる基準モデル（以下「モデル」）を設定します。最も合理的な方法は、現存する全てのストラディバリ・アーチの平均値をモデルとすることですが、これは現実的に不可能です。したがって、本報告書では、よく知られた書籍やポスターのデータをモデルとして使用します。

第二に、CTD 曲線が持つ問題点について考察します。まず、トロコイド (Trochoid、以下「TD」) 曲線の定義、種類、特性を説明します。次に、前述のモデルを円弧および CTD 曲線と比較し、CTD がストラディバリ・アーチとどのように異なるか、また、ストラディバリ・アーチがどれほど多様な形状を持つかを把握します。

第三に、TD の一種であるハイポトロコイド (Hypotrochoid、以下「HTD」) とエピトロコイド (Epitrochoid、以下「ETD」) 曲線を利用して 1~5 番アーチを再現する方法を説明します。

第四に、前述した二つの TD 曲線の限界について考察します。そして、この限界によって再現が不可能な場合、近似

^{*1} 一部の資料では「カーテイト・サイクロイド (Curtate cycloid)」と表現されています。

曲線を利用して解決する方法を説明します。

第五に、6 番アーチは他のアーチとは形状が異なるため、再現方法もまた異ならざるを得ません。近似曲線の作成原理を利用して 6 番アーチを作成する方法を説明します。

第六に、上記の方法を用いて 4 つのモデルのアーチを再現します。その後、イメージ、パラメータ、充満度、誤差などを分析し、ストラディバリ・アーチの特徴を把握し、再現方法の信頼性を評価します。

最後に、この再現法を実際の楽器製作に適用する方法について考察します。

付録では、等高線のパターン分析について説明し、モデル製作当時のアーチの様子と製作者の意図を推定します。

なお、本文中で特に表記がない限り、すべての数値の単位はミリメートル (*mm*) です。

1. アーチの定義

コロッセオのアーチ、橋脚のアーチ、そして弦楽器のアーチなど、私たちが一般的に呼ぶ「アーチ」は非常に多様な姿をしています。したがって、本報告書で扱う「アーチ」が何であり、どのような条件を満たすべきかをまず定義します。

1.1. アーチの条件

本書で言う「アーチ」とは、次の条件を満たすアーチを意味します。

条件 1.1. アーチの条件

- 頂点と両端点における接線の傾きは '0' でなければならない。
- 曲線は単調に増加または減少しなければならない。
- 頂点を基準に左右対称でなければならない。

「接線の傾き」とは、図 1 の赤い実線のように、特定の点において曲線に接する直線の傾きを指します。図の Curve A は頂点と両端点での接線の傾きが 0（水平）ですが、Curve B は端点の傾きが 0 ではありません。接線の傾きが 0 であるということは、その点がアーチの最も高い場所（頂点）または最も低い場所（端点）であることを意味します。Curve B のように端点の傾きが 0 でなければ、その点はアーチの最低点ではないため端点とはなり得ません。したがって、本報告書では Curve B のような曲線をアーチとは定義しません。

また、アーチは一方の端点から頂点まで高さが増加し続けなければなりません（単調増加）。この区間に高さが変わらない水平区間があったり、逆に高さが減少する区間があったりする場合、それはアーチとは言えません。なお、Condition 1.1.c は、再現対象のモデルには適用しません。

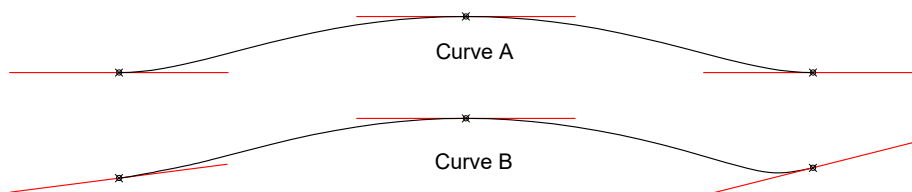


図 1: Tangent slopes at the apex and endpoints of an arch

1.2. アーチの位置

6 つのアーチの位置は、図 2、表 1 のように定義します。アーチの最低点から最高点までが再現対象であり、6 番アーチは頂点を基準に上部と下部に区分します。ただし、モデル D の 4 番アーチは、ローワーコーナー部ではなく、F ホールのすぐ下に位置します。^{*2}

^{*2} CT スキャン時に F ホールによってアーチが途切れるのを防ぐためと推測される

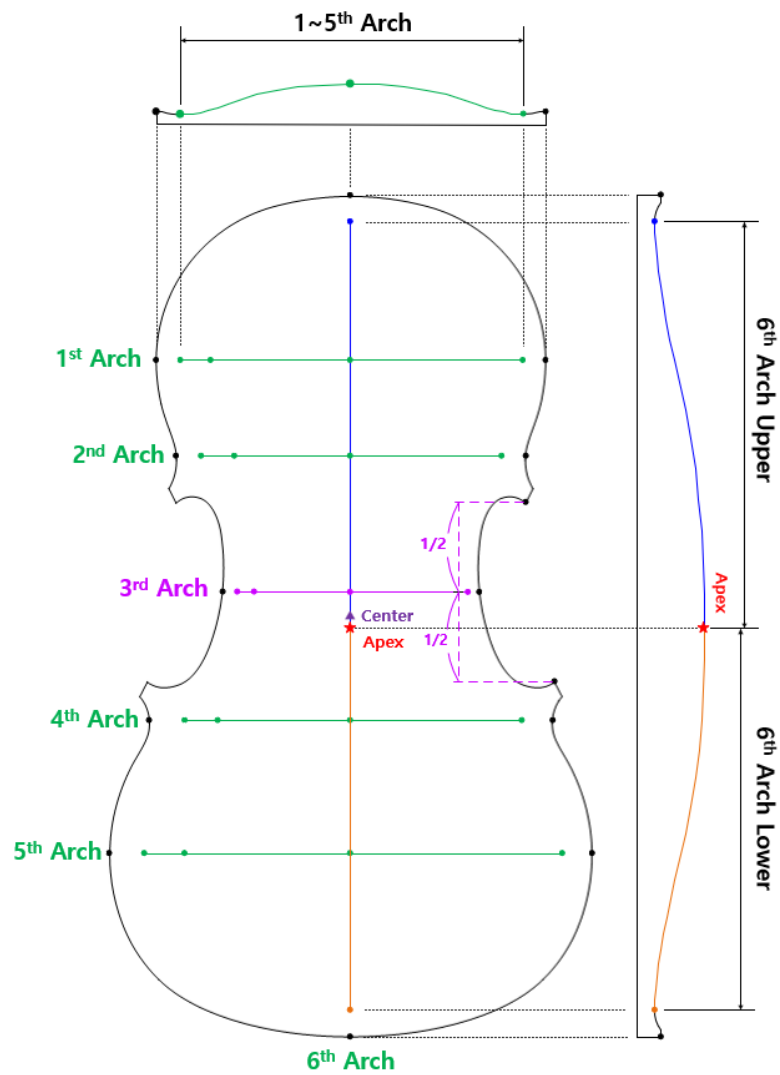


図 2: Definition of the 6 arches

Arch	Description
1st Arch	アッパーバウト（Upper bout）の最も広い部分を横断するアーチ
2nd Arch	アッパーコーナー（Upper corner）の最も凹んだ点を横断するアーチ
3rd Arch	上下コーナーの中間点を横断するアーチ
4th Arch	ローワーコーナー（Lower corner）の最も凹んだ点を横断するアーチ
5th Arch	ローワーバウト（Lower bout）の最も広い部分を横断するアーチ
6th Arch Upper	プレートの中心を縦断するアーチのうち、アーチの頂点を基準とした上部のアーチ
6th Arch Lower	プレートの中心を縦断するアーチのうち、アーチの頂点を基準とした下部のアーチ

表 1: Definition of the 6 arches

2. 再現対象モデル

再現には、計4種の楽器（モデルA、B、C、D）をモデルとして使用します。ヴァイオリン2台（A、D）、ヴィオラ1台（B）、チェロ1台（C）です。アーチを再現するには正確な諸元が必要となるため、各モデルの数値を抽出するためのモデリングを行います。この際、資料にある図と数値を最大限に活用し、不足している情報は図から直接抽出します。一つ注意すべき点は、プレートの歪みによって左右のアーチの形状が異なるということです。

2.1. モデルA、B、C

モデルA、B、Cは、Simone F. Sacconiの著書『The Secrets of Stradivari』（63～83ページ）に紹介されているヴァイオリン、ヴィオラ、チェロです。この資料には等高線をはじめとする詳細なデータが図と数値で示されており、再現対象として非常に優れています。

ただし、彼の著書には、これら3つのモデルが実際にどの楽器のデータであるかは明記されていません。しかし、著書の内容と他の研究者の分析を総合すると、モデルAはメサイア（Messiah, 1716）またはベッツ（Betts, 1704）を、モデルBはトスカナ・メディチ（Tuscan-Medici, 1690）を、そしてモデルCはゴア・ブース（Gore-Booth, 1710）またはピアッティ（Piatti, 1720）を基本とし、そこに他の楽器の平均的な特徴を併せて反映したものと推定されています。

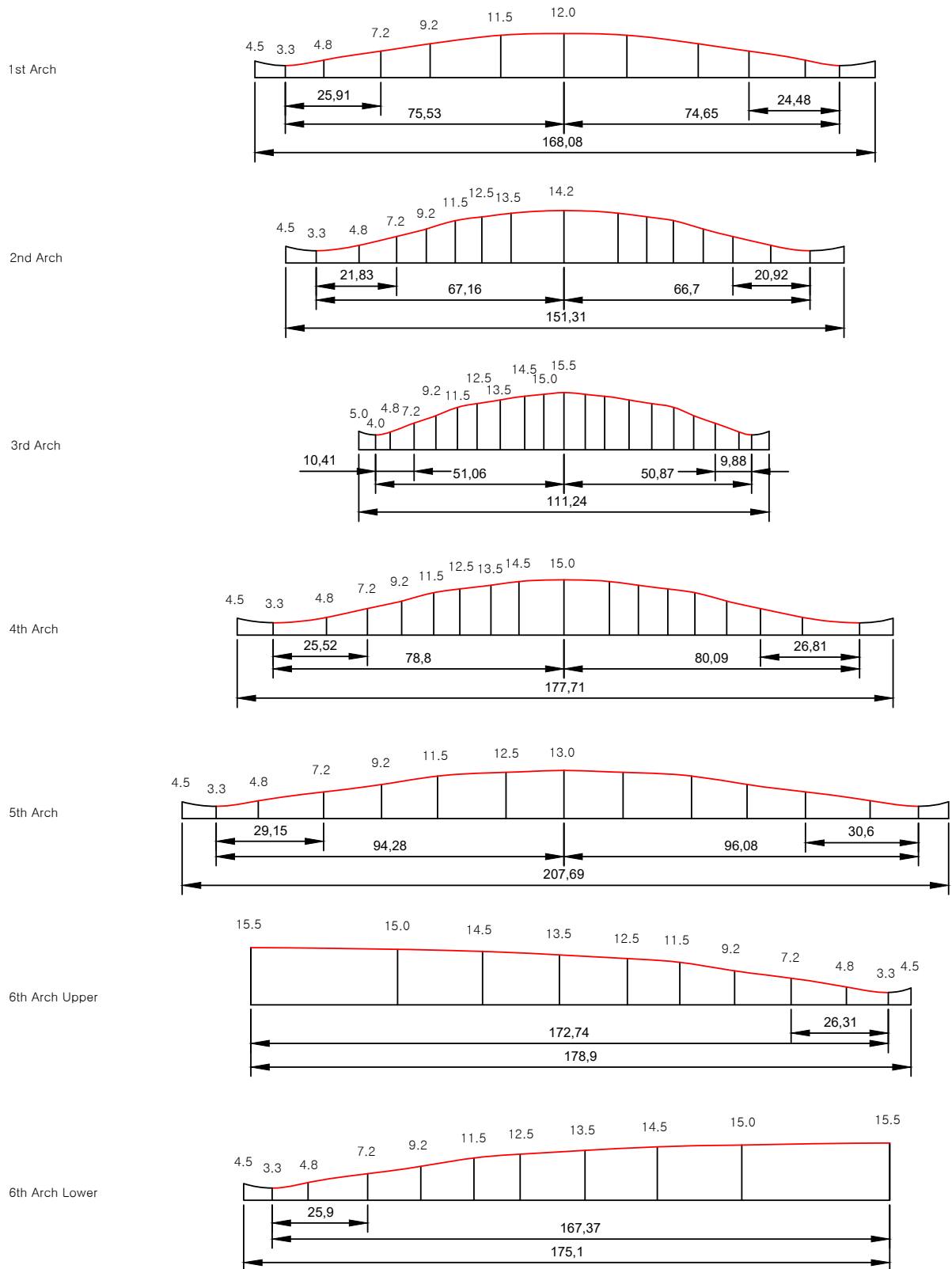
モデリングの方法と手順は以下の通りです。

1. 資料^{*3}の全体等高線画像をスキャンし、プレートの縦の長さを基準に縮尺を合わせます。
2. 縮尺を合わせた画像から、各アーチが位置する地点（プレート上端から各アーチまでの距離）のプレート幅を求めます。
3. 測定した幅と同一になるよう、詳細アーチ画像の縮尺を再度合わせます。
4. 詳細アーチ画像から、等高線の位置と高さに合わせて垂直線を引きます。
5. 垂直線の端点をスプライン曲線で連結します。このとき、スプラインはアーチの頂点と両端点での接線の傾きが0になるように設定します。

図3～8は、上記の方法でモデリングした3種のモデルのアーチです。赤い線は再現対象のアーチを、アーチ上の数字は各点の高さを表します。

これら3つの楽器をモデリングする過程で最も難しい点は、資料に示された数値データと図が互いに一致しないことです。資料の数値データ（各点の高さ）にそのまま従うと、でこぼこの曲線が作られてしまいます。一方、図の曲線に沿って線を抽出すると滑らかなアーチが得られますが、各点の高さがデータ値と完全に異なってしまいます。特に後者の方法はより大きな問題を引き起こします。この方法で完成したアーチを組み合わせると、元の資料の等高線とは全く異なる姿になるためです。したがって、本報告書では数値データを優先する前者の方法を選択せざるを得ませんでした。

^{*3} SIMONE F. SACCONI, 'The Secrets of Stradivari', p.63 ~ p.83



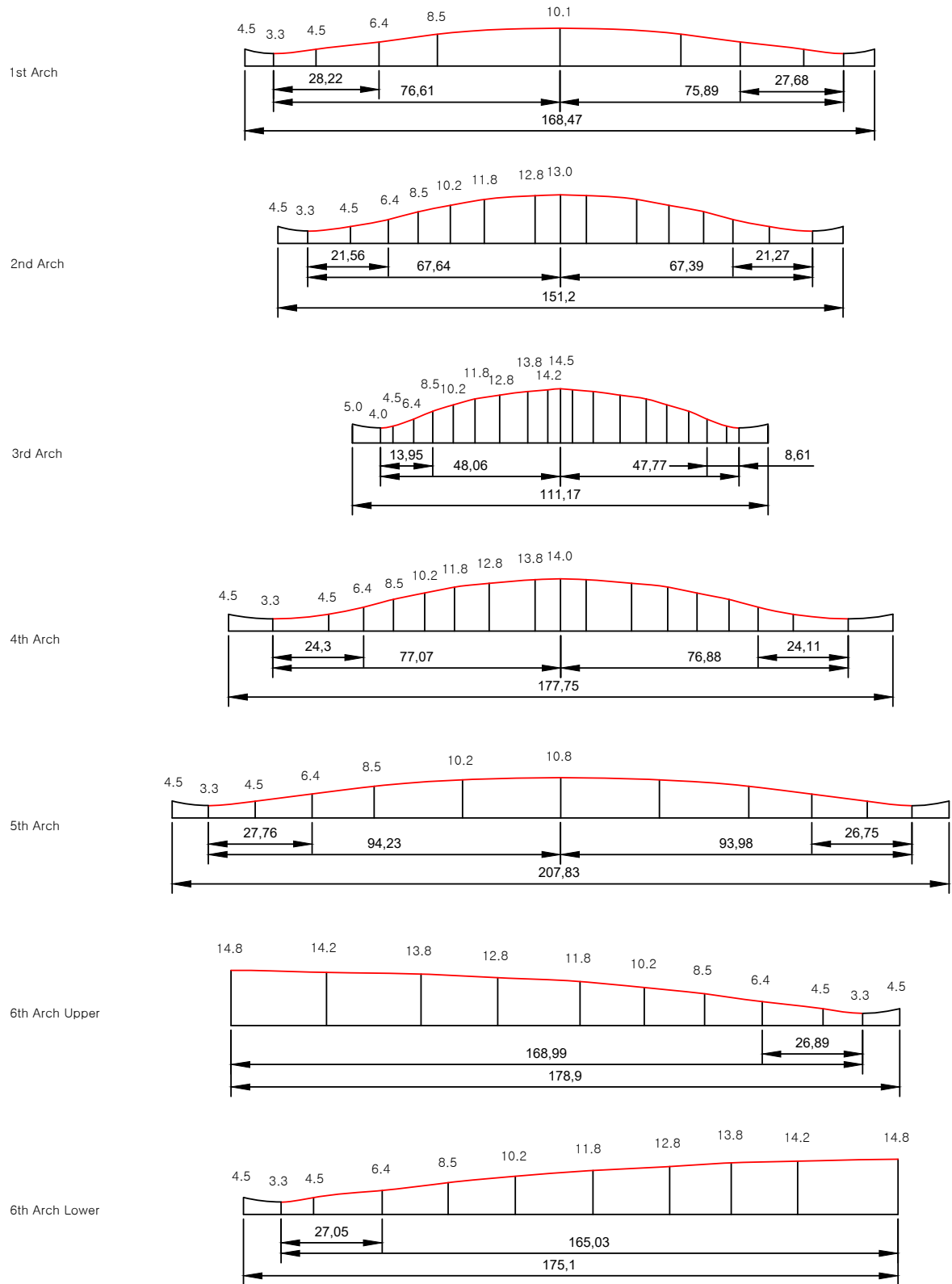


図 4: Model A, Violin Back

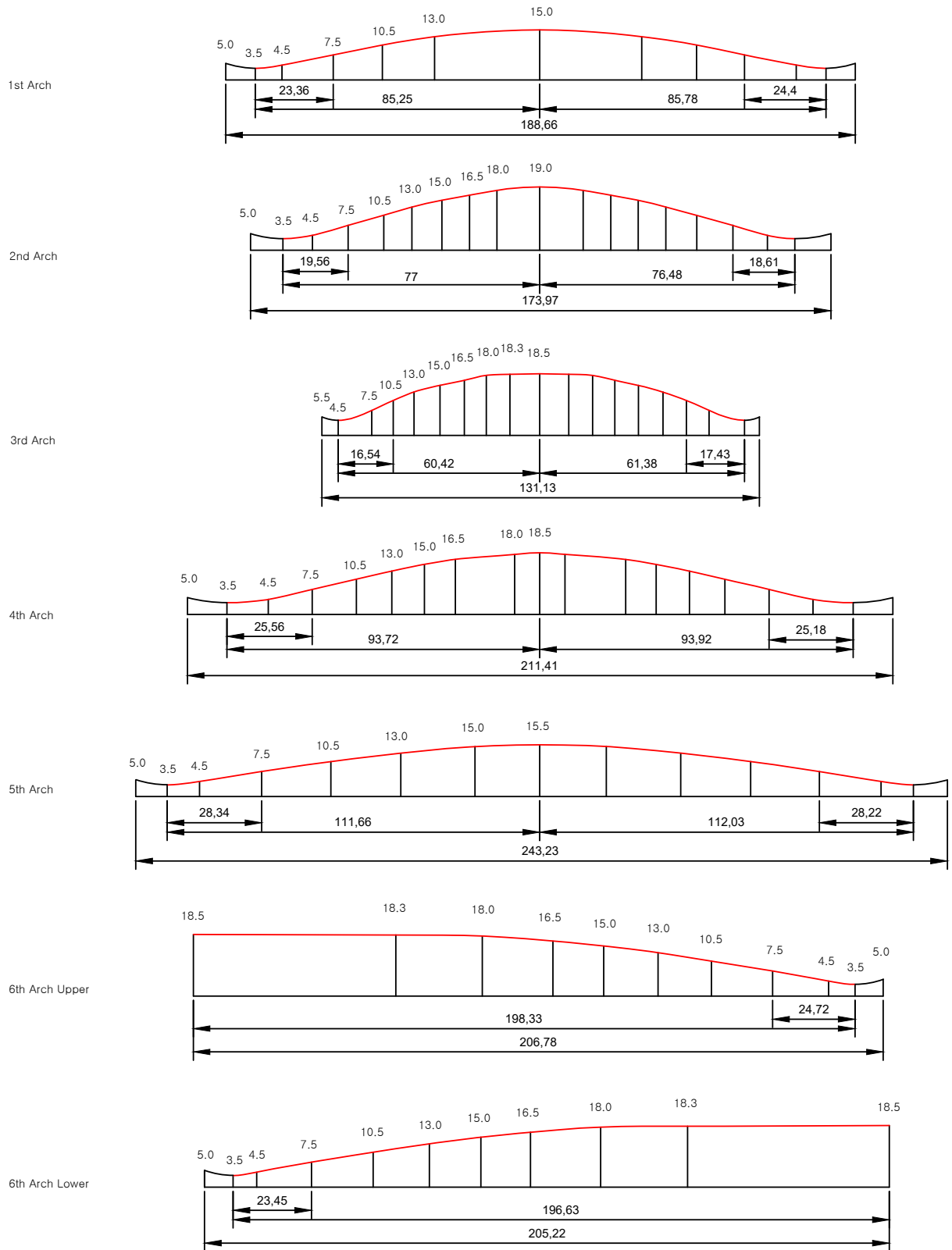


図 5: Model B, Viola Front

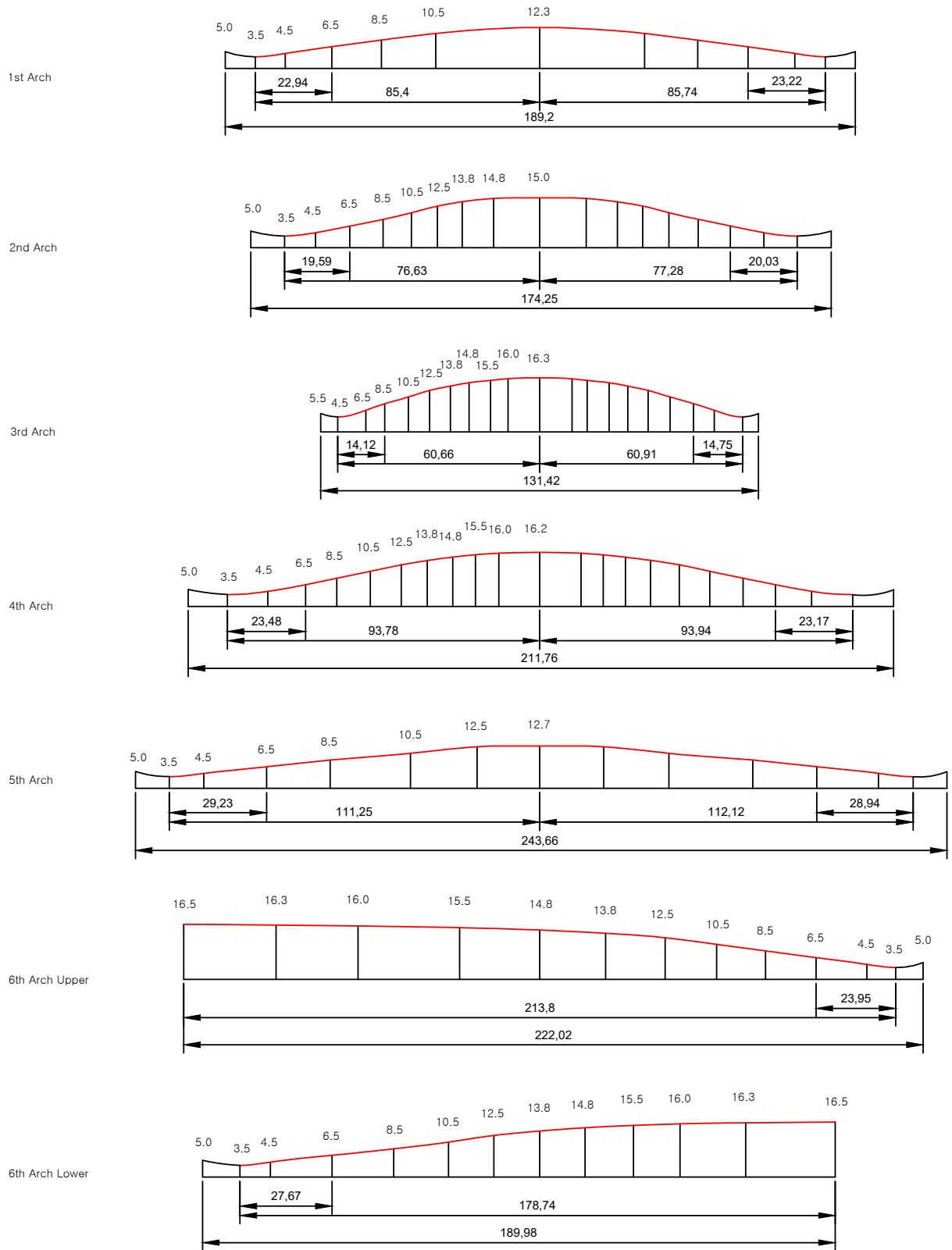


図 6: Model B, Viola Back

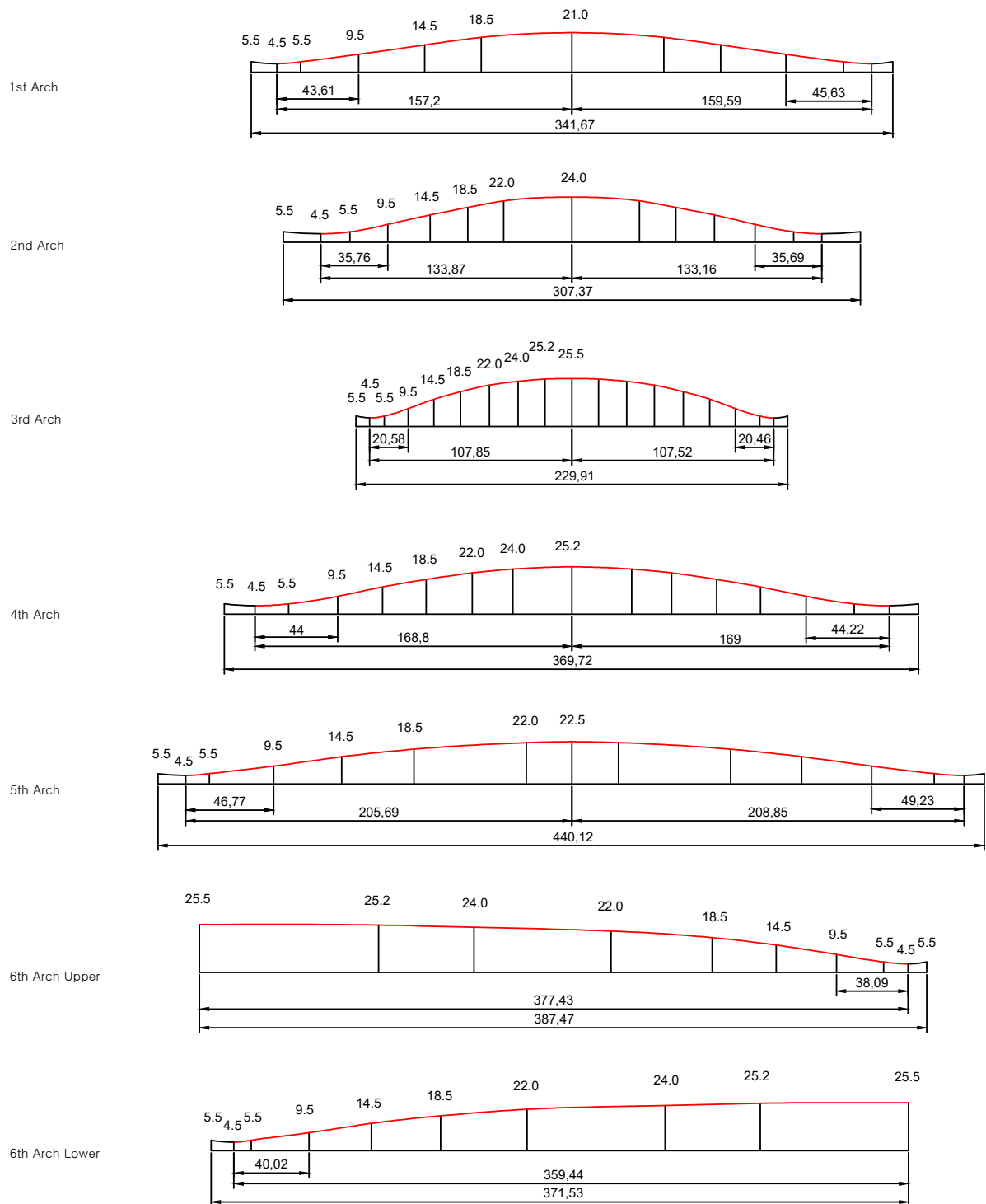


図 7: Model C, Cello Front

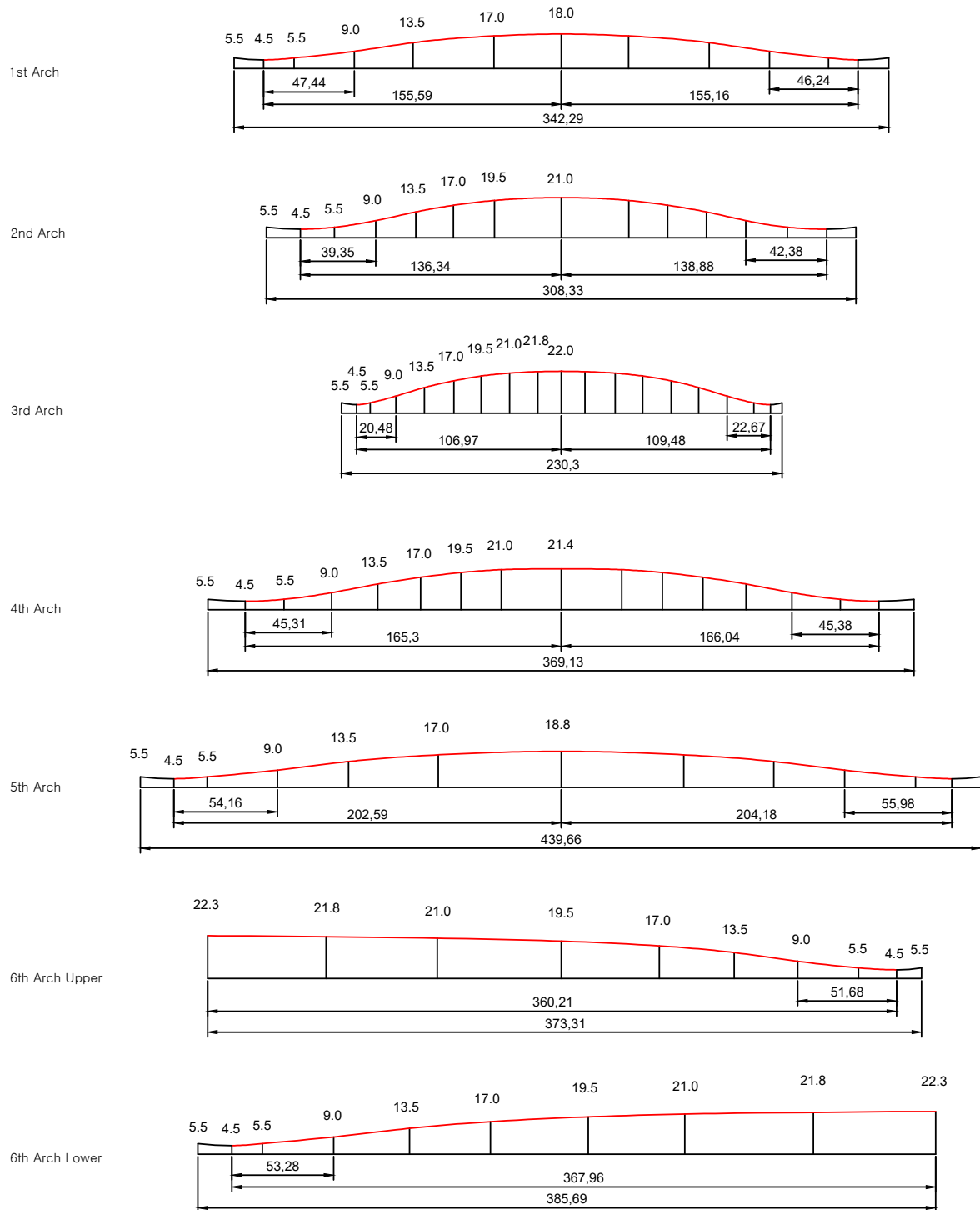


図 8: Model C, Cello Back

2.2. モデル D

モデル D は、ヴァイオリン「タイシアン」(Antonio Stradivari 'Titian', 1715) です。再現には、ザ・ストラド (The Strad) 社のポスター資料 (数値およびアーチ画像) を使用します。モデル A、B、C とは異なり、この資料は最新技術である CT スキャンを利用しているため、より正確なアーチ形状が期待できます。しかし、等高線データがないため、画像から直接等高線を抽出する必要があります。ポスターを利用したモデリング方法は以下の通りです。

1. ポスターのアーチ画像をスキャンします。
2. スキャンした画像のアーチ幅が資料の数値と一致するように縮尺を調整します。
3. 縮尺を調整した画像から、CAD プログラムのスプライン機能を利用してアーチ曲線を抽出します。
4. 3 番アーチの幅を基準に等高線の間隔を均等に分割した後、各点の高さを抽出します。
5. 4 で得られた等高線の高さの値を基準に、残りのアーチの等高線の位置を特定してプロットします。

画像からアーチ曲線を抽出する際は、CAD プログラムを利用して線の太さが十分厚くなるように画面を拡大した後、線の中央を通るスプラインを作成しました。3 番アーチから等高線を抽出する際には、3 番アーチの幅を 17 等分し、アーチの端点から奇数番目の地点を等高線の位置として設定します。すなわち、1、3、5、...、15 番目の分割地点を等高線の位置として設定します。これにより、8 つの等高線を作成することができます。

図 9、10 は、完成したモデル D の姿です。このモデルにはいくつかの問題点があります。第一に、アーチは滑らかですが、左右の非対称性が顕著です。特にサウンドポスト側が多く突き出ています。第二に、表板の 6 番アーチは中央部が周辺より低く、頂点の位置を特定することが困難です。アーチを再現するには頂点の位置が不可欠です。そのため、ブリッジ付近を約 0.01 持ち上げる最小限の補正を行いました。このため、表板の 6 番アーチの頂点の位置は正確でない可能性があります。第三に、6 番アーチの頂点が 3 番アーチの頂点より低いですが、これはポスターの製作過程における誤差であると考えられます。最後に、裏板の 6 番アーチの上下端のエッジ幅が非常に狭いです。表板の 6 番アーチの頂点に対する補正を除き、残りの問題点はそのままにして、資料の形状をそのまま使用します。

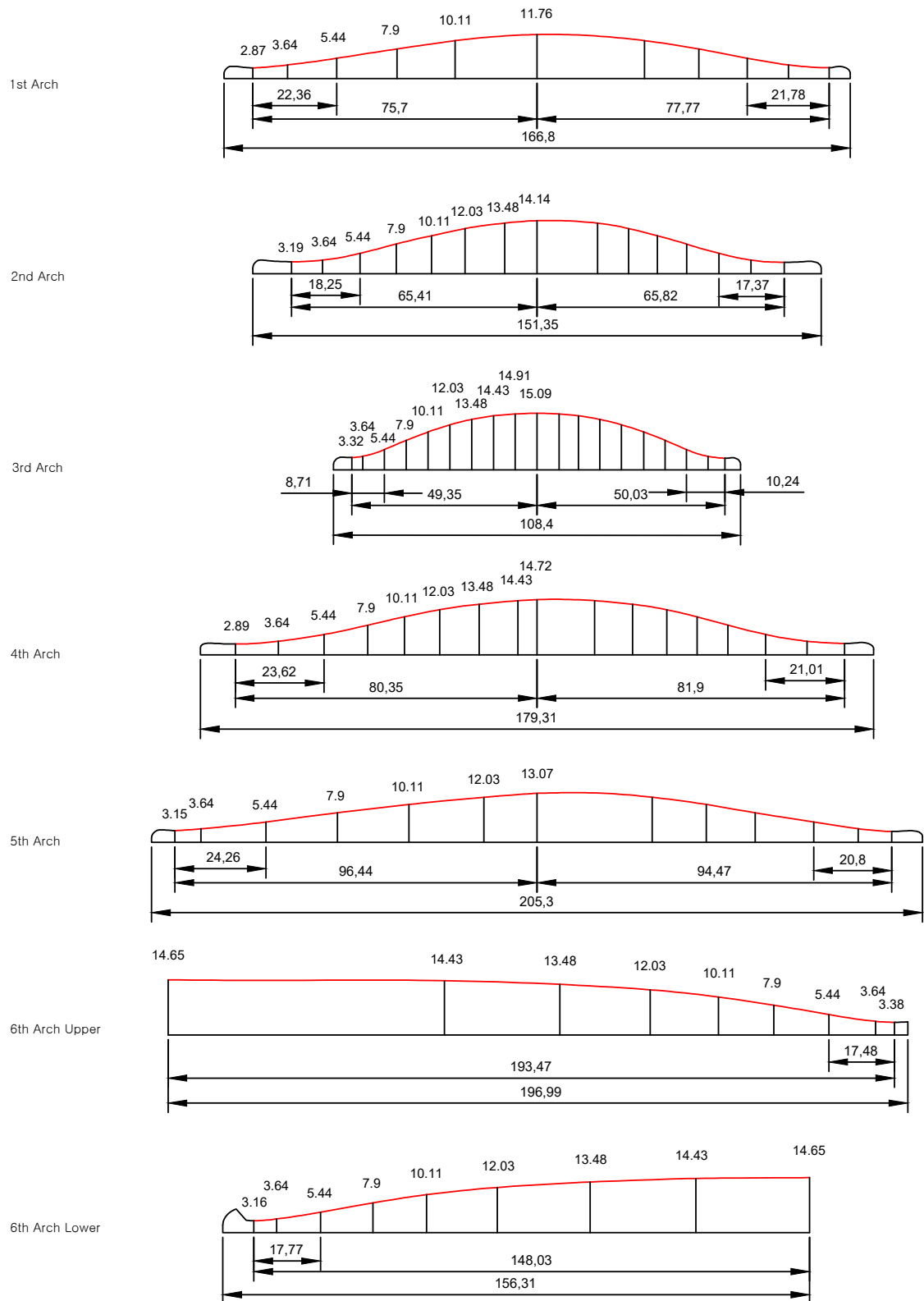


図 9: Model D, Titian Front

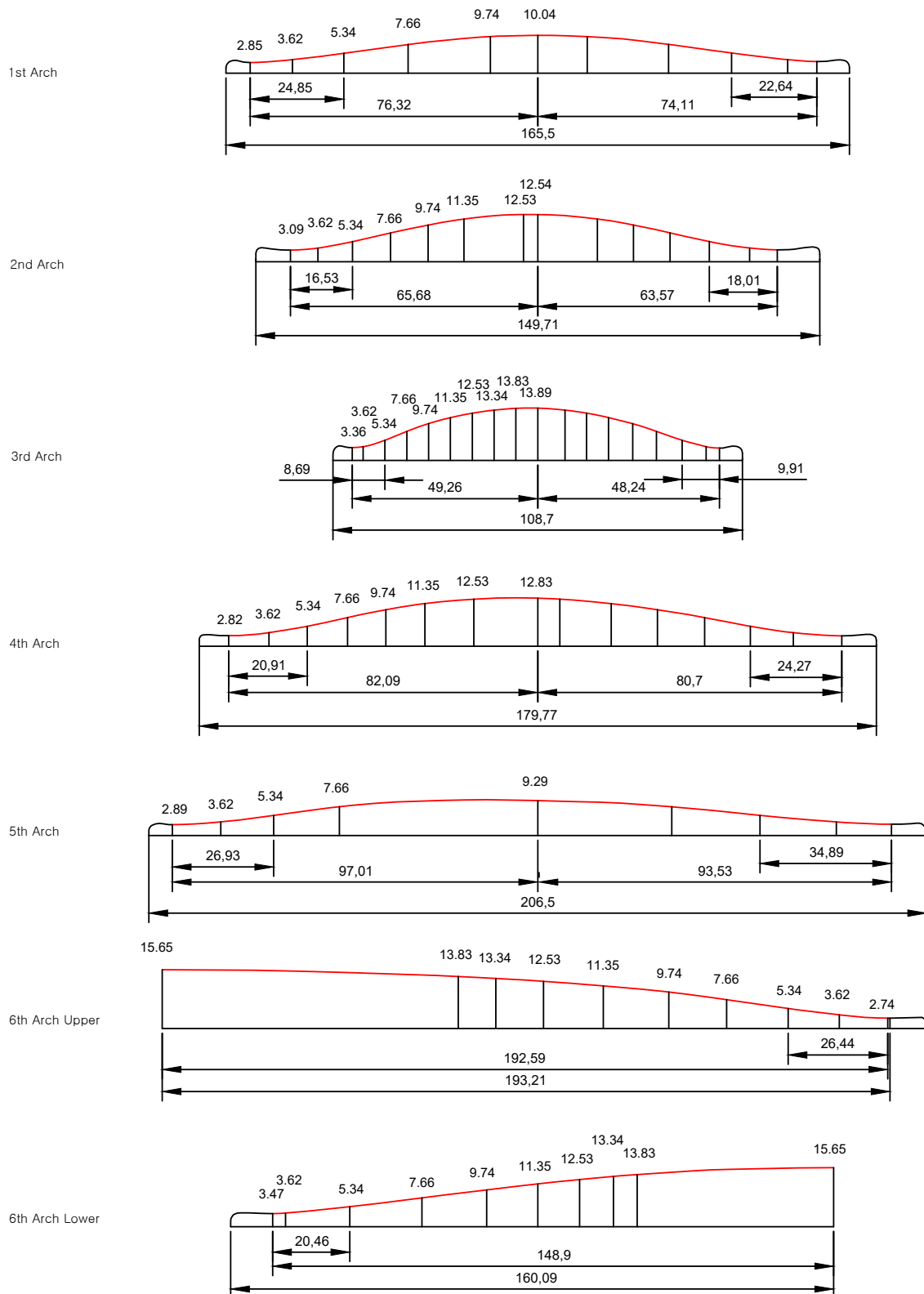


図 10: Model D, Titian Back

3. トロコイド

ストラディバリ・アーチに最も類似しているとされるカーテイト・トロコイド (CTD) は、トロコイド (TD) の一種です。TD は、その生成原理によっていくつかの曲線に分けられます。本章では、TD の種類別の定義と特性を考察し、CTD の問題点と解決策について説明します。

3.1. トロコイドの定義と種類

定義 3.1. トロコイド (Trochoid, TD)

半径 r の円 A が直線上を転がるか、または半径 R の別の円 B の内側 (内接) または外側 (外接) に沿って滑ることなく転がる時、円 A の中心から d だけ離れた点 P が描く軌跡

定義 3.1 に基づき、TD は表 2 のように合計 9 つの曲線に分類されます。

Type	Name	Base	d, r	r, R	Shape
Basic Trochoid	Curtate Trochoid	Line	$d < r$	\cdot	Wavy
	Cycloid	Line	$d = r$	\cdot	Pointed
	Prolate Trochoid	Line	$d > r$	\cdot	Looped
Hypotrochoid	Curtate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Hypocycloid	Circle (inscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped
Epitrochoid	Curtate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Epicycloid	Circle (circumscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped

表 2: Types of Trochoid curves. r :radius of circle A, R :radius of circle B, d :distance from the center of circle A to the tracing point P. Wavy:violin arch shape, Looped:shape of α rotated 90 degrees.

TD は大きく 3 つのタイプに分けられます。第一の「基本トロコイド (Basic Trochoid)」は円が直線上を転がる場合を意味し、第二の「ハイボトロコイド (Hypotrochoid)」は小さい円が大きい円の内部に沿って転がる場合、第三の「エピトロコイド (Epitrochoid)」は小さい円が大きい円の外側に沿って転がる場合を指します。また、 $d < r$ のときは「カーテイト (Curtate)」、 $d = r$ のときは「サイクロイド (Cycloid)」、 $d > r$ のときは「プロレート (Prolate)」、円に内接するときは「ハイポ (Hypo)」、円に外接するときは「エピ (Epi)」という名称が付与されます。

TD の名称における特異な点は、 $d = r$ の場合には「トロコイド」という名称を用いず、「サイクロイド」という名称を使用することと、 $r > R$ は定義上成立しないため、そのような曲線はトロコイドとは呼ばないことです。したがって、一部の文献で慣用的に使用されている「カーテイト・サイクロイド (Curtate Cycloid)」という用語は数学的には推奨されない表現であり、「カーテイト・トロコイド (Curtate Trochoid)」がより適切な表現です。

次の章では、カーテイト・トロコイドについて、より詳しく見ていきます。

3.2. カーテイト・トロコイド

ここでは、CTD がどのような曲線であるかを考察し、モデルと比較してどのような問題点があるかを把握します。

3.2.1. カーテイト・トロコイドの定義

CTD は次のように定義します。

定義 3.2. カーテイト・トロコイド (Curtate Trochoid, CTD)

半径 r の円 A が直線上を滑ることなく転がる時、円 A の中心から d だけ離れている点 P が描く軌跡。(ただし、 $d < r$)

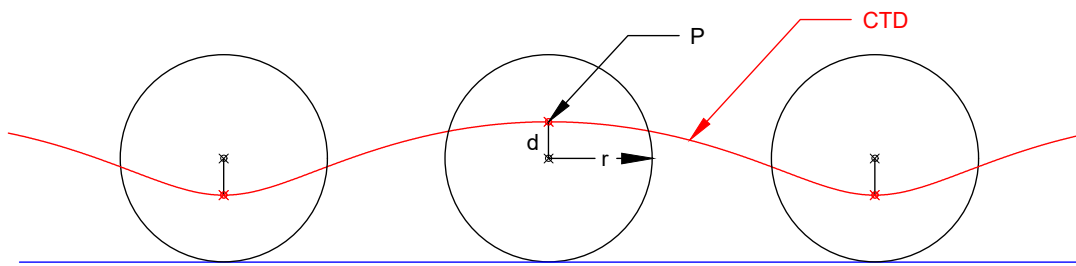


図 11: Curtate Trochoid

CTD は、同一パターンの曲線が繰り返される構造です。この曲線において、点 P が最も高い地点がアーチの頂点になります。そして、頂点から円が左右に半回転し、点 P が最も低い地点に来た時がアーチの両端点となります。

CTD は、数学的に次のように表現できます。

$$\begin{cases} x = r\theta - d \sin(\theta) \\ y = r - d \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

r : 転がる円（車輪）の半径

d : 円の中心から点 P までの距離（ただし、 $d < r$ ）

θ : 円が回転した角度

図 11 において、CTD 曲線は同一のパターンが繰り返されます。このうち、アーチに該当する一区間だけを切り取ったものを「カーテイト・トロコイド・アーチ (Curtate Trochoid Arch、以下 CTDA)」と呼ぶことにします。

CTDA の幅 W は円の円周と等しく、高さ H は d の 2 倍と等しいため、

$$\begin{cases} W = 2\pi r \\ H = 2d \end{cases} \quad (2)$$

となります。したがって、アーチの幅を広げたい場合は半径 r を大きくし、アーチの高さを高くしたい場合は d を大きくすればよいのです。ここから分かる重要な事実は、CTDA は幅と高さ以外の他の形態的要素を変更できないため、幅と高さが同じ CTDA はただ一つの形状しか存在しないということです。すなわち、

CTDA はアーチの「充満度」を調節できない。

まさにこの点が、CTDA をストラディバリ・アーチの再現に用いることが困難な決定的な理由です。

3.2.2. CTDA vs ストラディバリ・アーチ

ここでは、CTDA をモデルのアーチと比較し、どのような問題があるかを考察します。図 12~19 は、モデル A、B、C、D の表板と裏板のアーチを CTDA および円弧と比較したものです。比較対象は各モデルの左側のアーチです。表板はベースバー側、裏板はサウンドポスト側であり、チェロはその逆です。図において、赤い線はモデルのアーチ、青い線は CTDA、黒い線は円弧を示します。

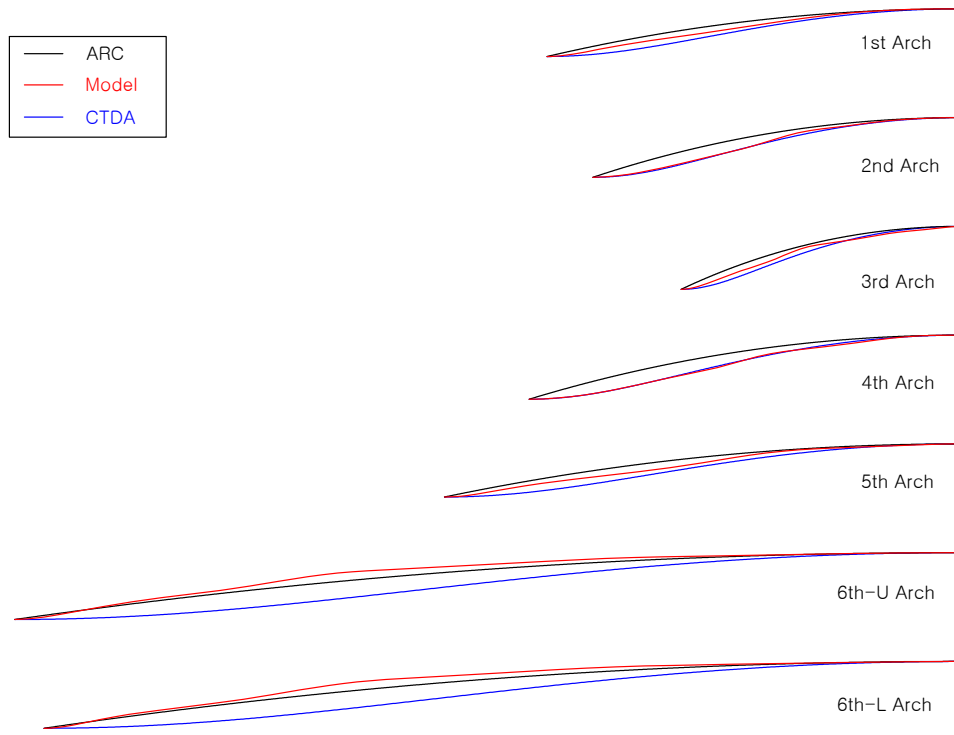


図 12: Model A, Violin Front (Bass bar side)

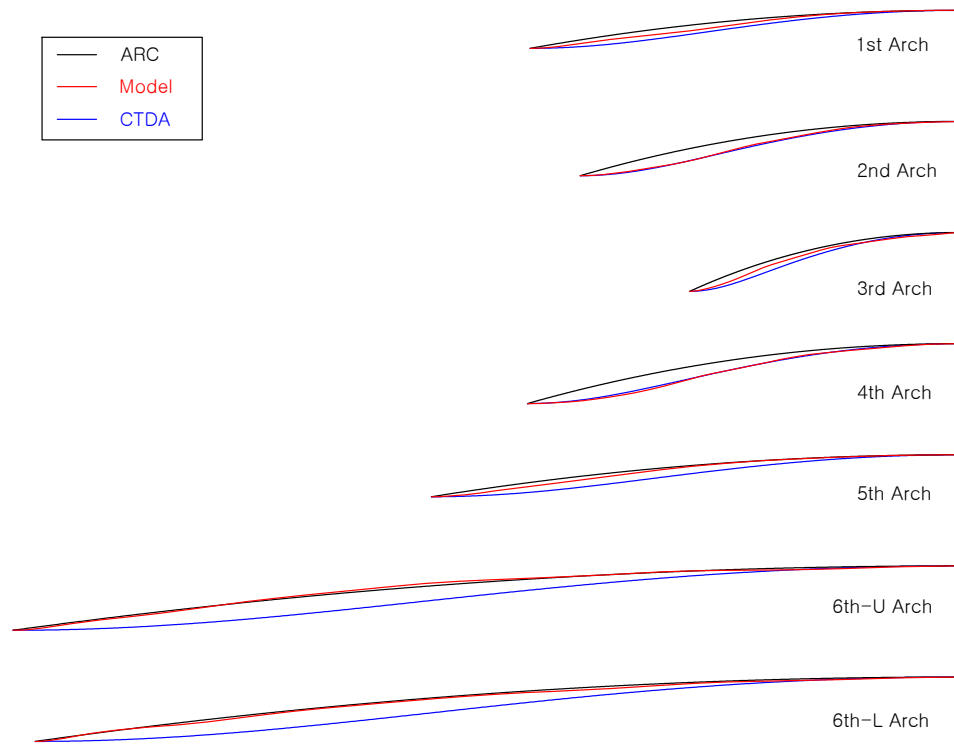


図 13: Model A, Violin Back (Sound post side)

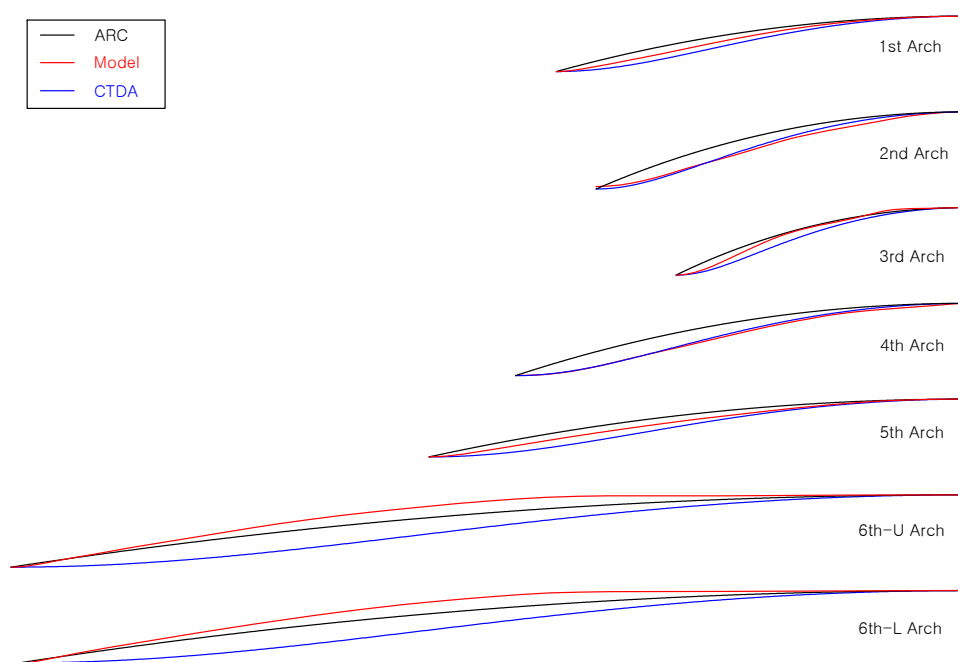


図 14: Model B, Viola Front (Bass bar side)

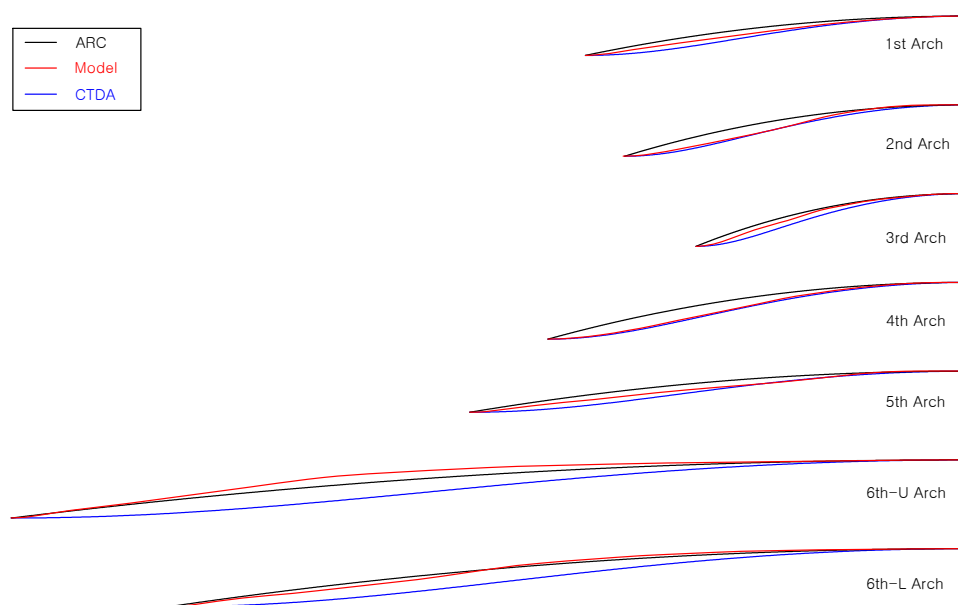


図 15: Model B, Viola Back (Sound post side)

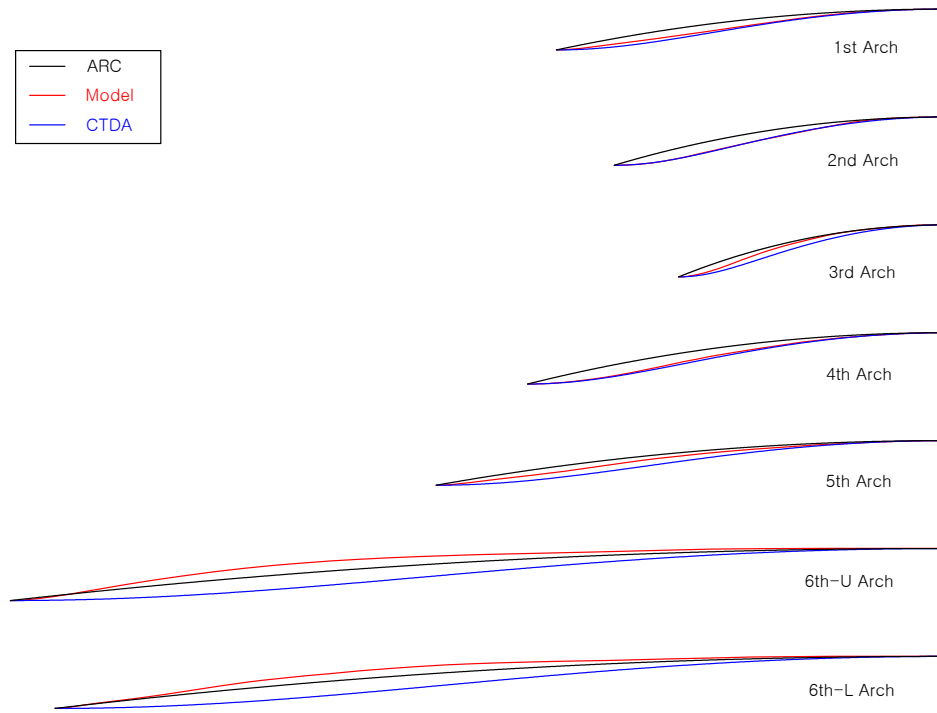


図 16: Model C, Cello Front (Sound post side)

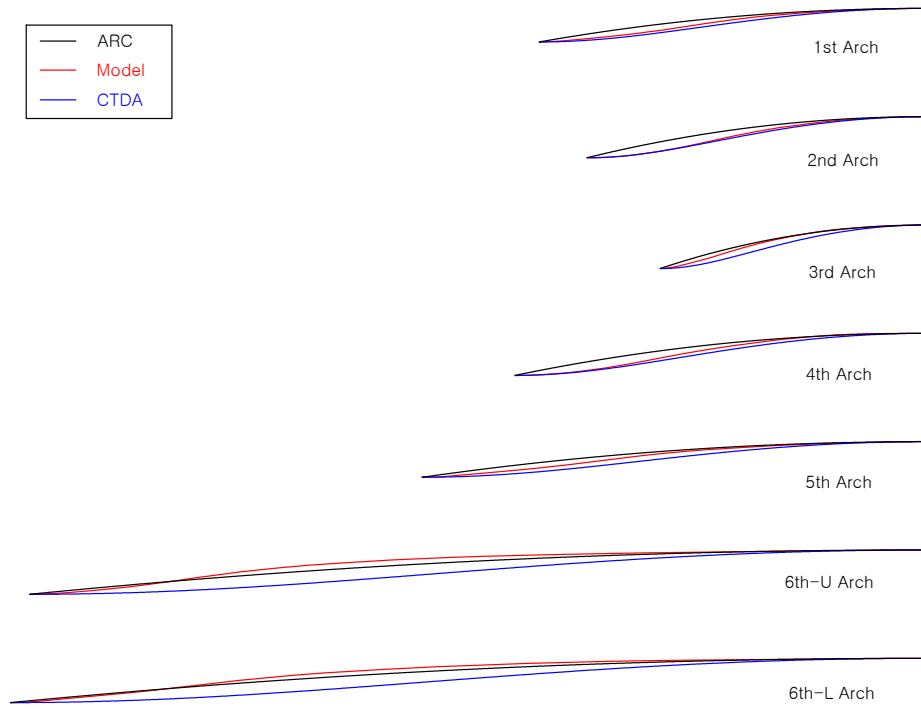


図 17: Model C, Cello Back (Bass bar side)

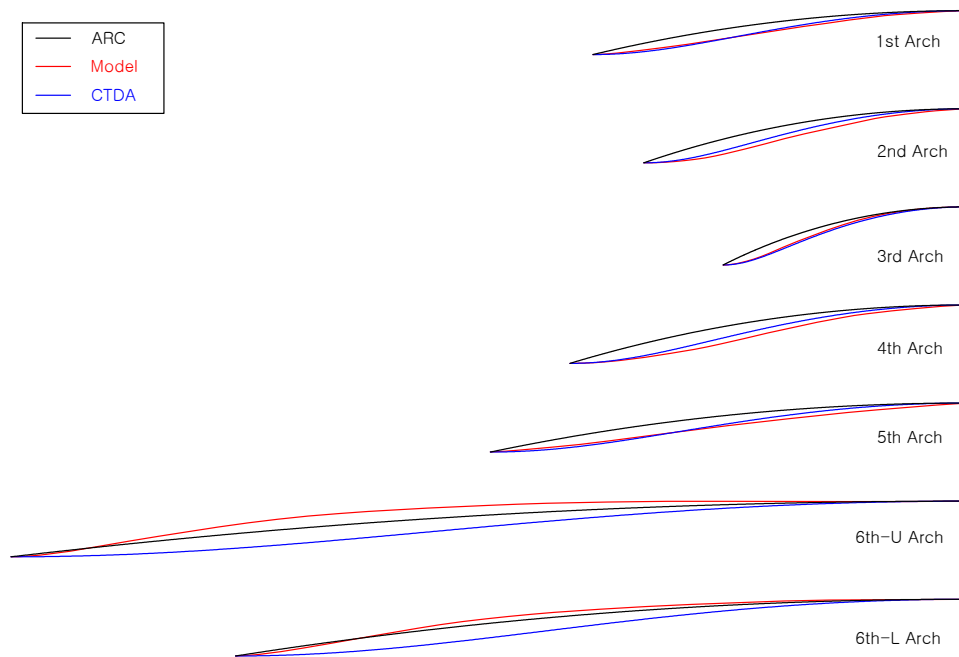


図 18: Model D, Titian Front (Bass bar side)

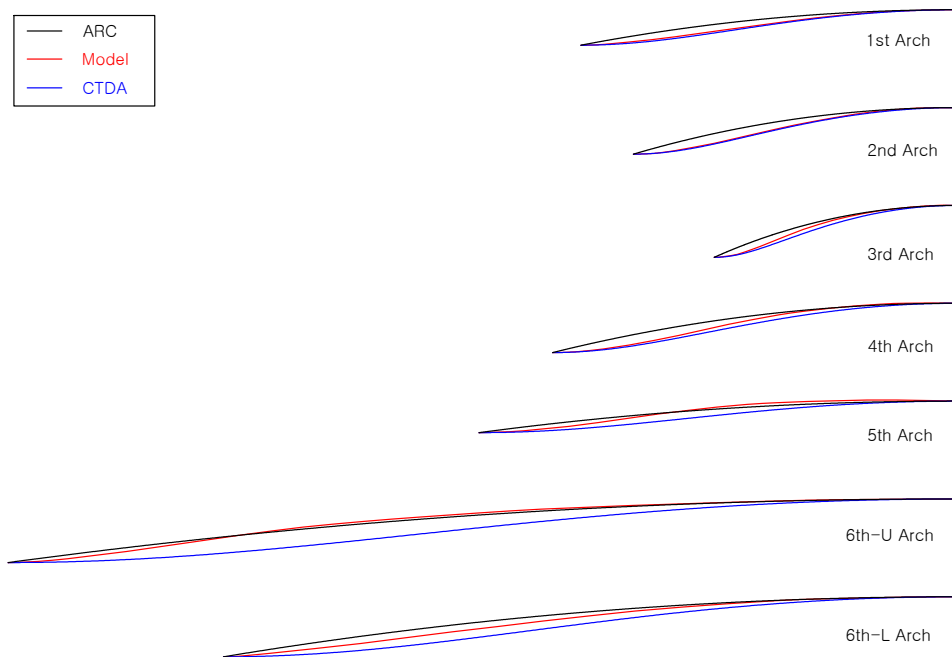


図 19: Model D, Titian Back (Sound post side)

上記の図を通してモデルのアーチの特徴を分析すると、以下のようになります。

- 1、3、5 番アーチ：円弧と CTDA の中間的な形状で、CTDA より充満度が大きく、円弧よりは小さい。
- 2、4 番アーチ：CTDA と非常に類似しており、充満度がほぼ同じである。
- 6 番アーチ：表板は円弧より充満度が大きく、裏板は円弧とほぼ同じか、わずかに大きい。

また、モデル D（タイシアン）の表板の 2、4 番アーチは、CTDA より充満度がさらに小さいことも確認できます。

要約すると、CTDA はストラディバリ・アーチに比べてほとんどの場合、充満度が不足しており、一部のアーチでは同程度であるか、むしろ少し過剰です。これは、CTDA だけではストラディバリ・アーチを再現できないことを意味します。したがって、ストラディバリ・アーチを再現するためには、

幅と高さを維持しながら充満度を調節できなければならない。

という結論に至ります。その答えを見つけるために、再び CTDA の定義に戻ってみましょう。

CTD の定義には、「円が直線上を転がる」という条件があります。もし、この「直線」を「曲線」に変えたらどうなるでしょうか。

図 20 は、円が直線上を転がる場合と、円が曲線に沿って転がる時に生成されるアーチを示しています。上段は上向きに曲がった曲線、中段は直線（CTDA）、下段は下向きに曲がった曲線に沿って円が転がる場合です。

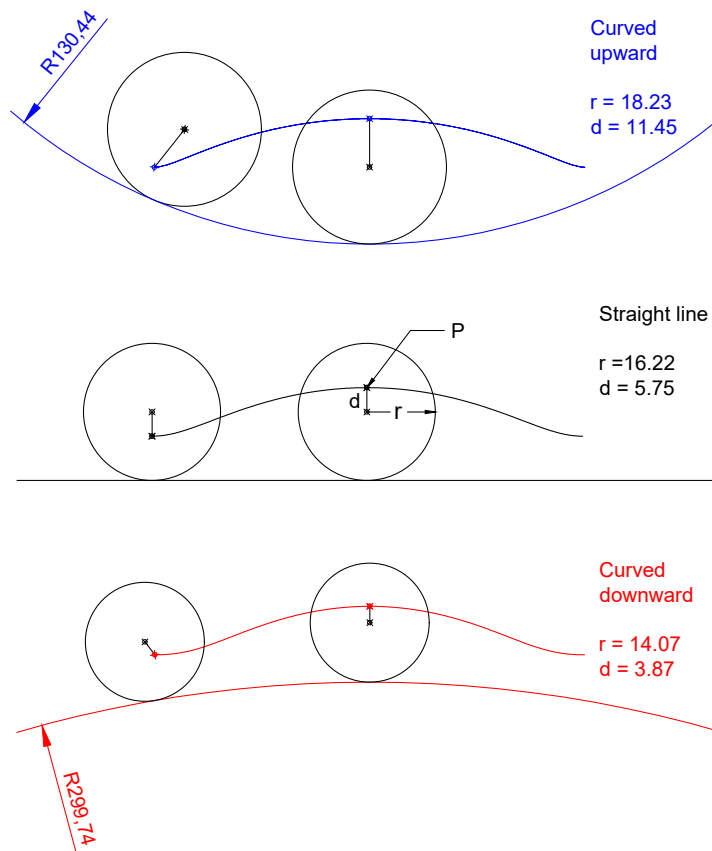


図 20: Arches created by a circle rolling on a curve vs. a CTDA

より正確に言えば、上段は円が他の円の内側を転がる場合（内接）であり、下段は外側を転がる場合（外接）です。

3つのアーチの充満度を正確に比較するためには、すべてのアーチの幅と高さが同一でなければならないため、パラメータ (R, r, d) の値は適切に調整された状態です。そして、下の図 21 は、3つのアーチを比較しやすいように重ね合わせた図です。

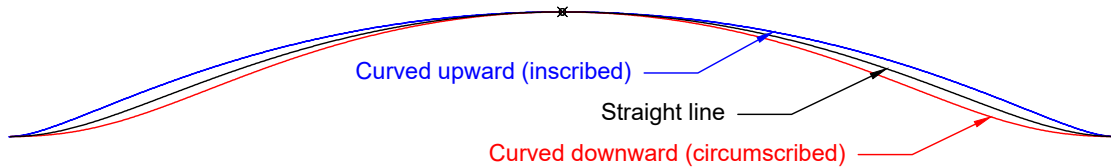


図 21: Comparison of arches created by a circle rolling on a curve and a CTDA

図 20 と 21 は、本報告書の核心を示しています。

- 円が上に凸の曲線に沿って転がる時に生成されるアーチは、CTDA より充満度が大きい。
- 円が下に凸の曲線に沿って転がる時に生成されるアーチは、CTDA より充満度が小さい。

ということが分かります。すなわち、

CTD において基準線を直線の代わりに曲線に変えれば、アーチの充満度を調節できる。

という結論が得られます。ここで、下／上向きに曲がった曲線（円）の半径 (R) が無限大に近づくと直線になるため、その結果は CTDA とほぼ同じになります。逆に半径を小さくしていくと、内接する場合は充満度が大きくなり、外接する場合は充満度が小さくなります。

先の表 2 で説明したように、円が他の円の上を転がる時に生成される曲線が、まさにハイポトロコイドとエピトロコイドです。図の青いアーチが「カーテイト・ハイポトロコイド (Curtate Hypotrochoid、以下「CHT」)」であり、赤いアーチが「カーテイト・エピトロコイド (Curtate Epitrochoid、以下「CET」)」です。つまり、CHT と CET を使用すれば、幅と高さを維持しながらアーチの充満度を自由に調節できます。ただし、アーチ形状の曲線を得るためには、必ず $d < r$ と $r < R$ の条件を満たす必要があります。もし $d = r$ になると両端が尖ってアーチの基本条件から外れ、 $r > R$ であれば全く異なる形状の曲線になるためです。

3.3. カーテイト・ハイポトロコイド

3.3.1. カーテイト・ハイポトロコイドの定義

CHT は次のように定義します。

定義 3.3. カーテイト・ハイポトロコイド (Curtate hypotrochoid, CHT)

半径が R の大きい円 B の内側を、半径が r の小さい円 A が滑ることなく転がる時、小さい円 A の中心から d だけ離れた点 P が描く軌跡（ただし、 $d < r, r < R$ ）

CHT と CTD の最も大きな違いは、円が直線ではなく、他の円の内部に沿って転がるという点です。

数学的な表現は以下の通りです。

$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r) \cos(\theta) + d \cdot \cos(\frac{R-r}{r} \theta) \\ y(\theta) = (R - r) \sin(\theta) - d \cdot \sin(\frac{R-r}{r} \theta) \end{cases} \quad (3)$$

R : 外部円 B の半径

r : 内部円 A の半径 (ただし、 $r < R$)

d : 内部円 A の中心から点 P までの距離 (ただし、 $d < r$)

θ : 内部円が回転した角度

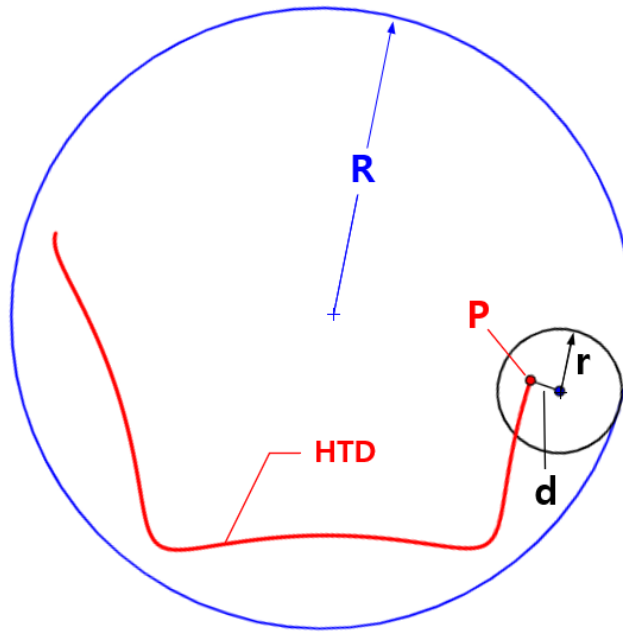


図 22: Hypotrochoid

図 22 は CHT の一例です。CHT は小さい円が回転し続けながら作る連続的な曲線です。したがって、アーチの幅、高さ、充満度などを分析するためには、この連続した曲線からアーチに該当する一区間を抽出しなければなりません。このように CHT から抽出したアーチを「CHTA (Curtate Hypotrochoid Arch)」と呼ぶことにします。アーチを正確に抽出するためには頂点と端点の位置を知る必要がありますので、二つの点を次のように定義します。

定義 3.4. カーテイト・ハイポトロコイドの頂点

大きい円 B の中心から最も近い軌跡線上の点

定義 3.5. カーテイト・ハイポトロコイドの端点

大きい円 B の中心と頂点を結ぶ線に垂直な直線が接線となる、軌跡上の二つの点。この二点は頂点を基準に左右対称の位置にある

頂点を見つけるのは簡単ですが、端点を見つけるのは困難です。CHT は全体として回転しながら同一のパターンを繰

り返すため、私たちが抽出しようとするアーチが正確に水平に置かれている確率はほとんどないからです。CHT からアーチを抽出する方法は以下の通りです。

3.3.2. カーテイト・ハイボトロコイドからのアーチ抽出

CHT は同一のパターンが繰り返される曲線です。ここからアーチを抽出するためには、頂点と端点を正確に見つける必要があります。抽出過程は以下の通りです。

1. CHT 曲線を描く。- 図 23.(a) -
2. 互いに隣接する二つの点のうち、大きい円 B の中心から最も遠い二点（赤い点）を「仮の端点」と定める。- (a) -
3. 二つの仮の端点の間の区間を抽出し、「仮のアーチ」を作成する。- (b) -
4. 仮のアーチの両端点が水平になるように、曲線全体を回転させる。- (b) -
5. 回転させた仮のアーチから、接線の傾きが '0' になる地点、すなわち実際のアーチの端点（緑の点）を見つける。- (b) -
6. 見つけ出した二つの実際の端点（緑の点）の間の区間を、最終的なアーチとして抽出する。- (c) -

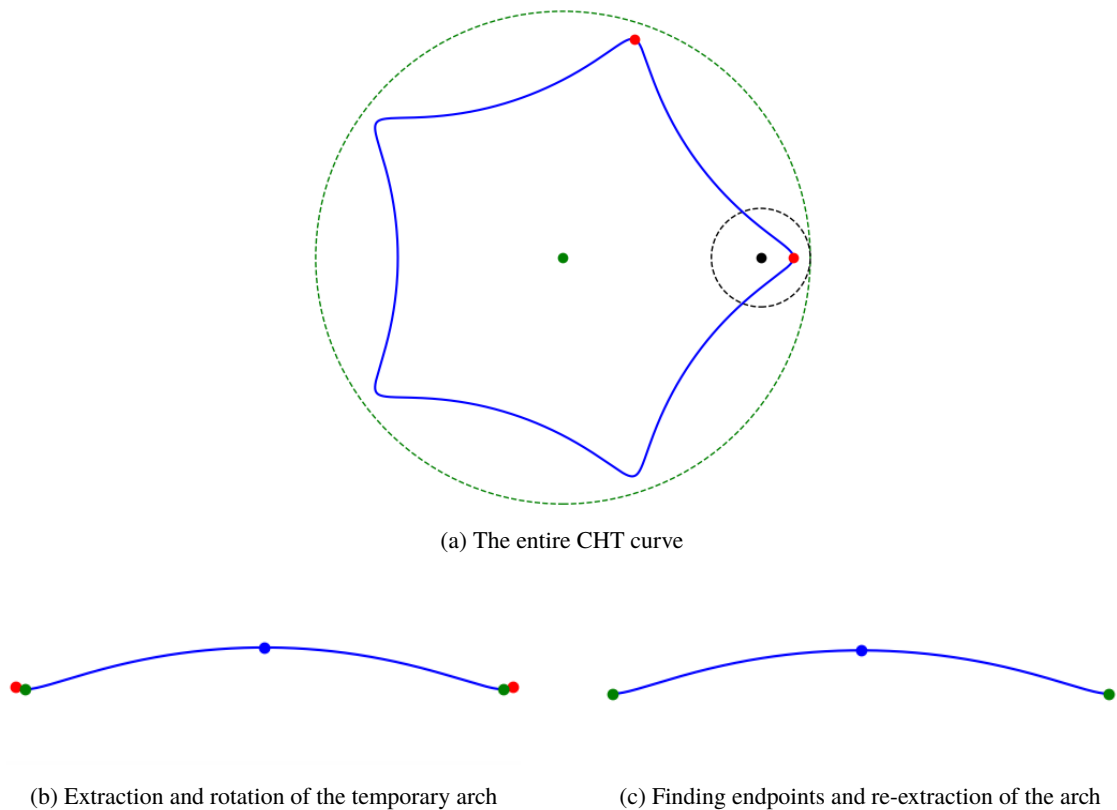


図 23: Process of extracting an arch from a CHT

このように CHTA を抽出して初めて、アーチの幅、高さ、充満度を判断することができます。しかし、幅と高さは容易に測定できますが、充満度を判断するためには別途の基準が必要です。

3.3.3. カーテイト・ハイボトロコイド・アーチの充満度

CHTA の充満度を判断するためには、判断の基準点が必要です。この基準点を「充満度制御点 (Fullness control point) Z」と呼ぶことにします。充満度制御点 Z は、アーチ線上の任意の点として、アーチの端から x 方向にアーチ幅の $1/8$

～1/6 程度離れた位置に選定します。この区間は、アーチの充満度が変化する際に変位が最も大きい部位であり、充満度の変化をより容易に判別できるためです。

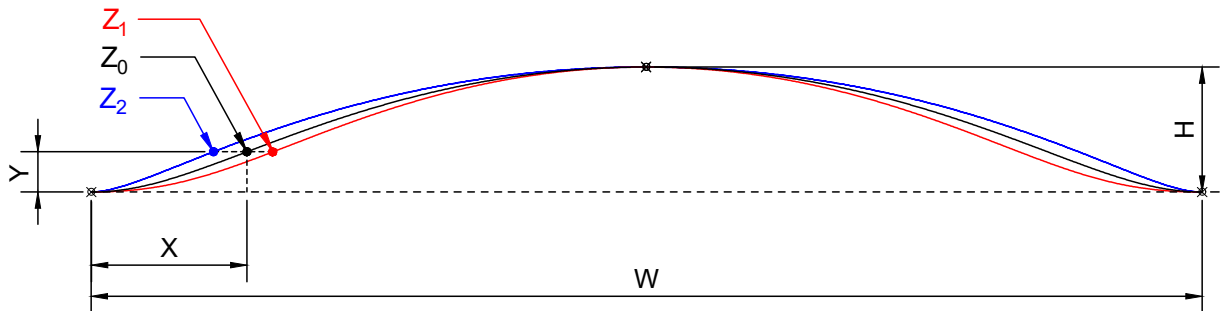


図 24: Fullness control point Z

図 24 は、3 つのアーチの充満度を比較するために、それぞれの充満度制御点 (Z_0, Z_1, Z_2) を示したものです。3 つの制御点はすべて y 軸の高さは同じですが、 x 軸の位置が異なります。基準点 Z_0 (黒いアーチ) に比べ、 Z_1 (赤いアーチ) はアーチの内側 (右側) にあるため、充満度がより小さいと判断します。一方、 Z_2 (青いアーチ) はアーチの外側 (左側) にあるため、充満度がより大きいと言えます。

このような原理を利用して CHTA の充満度を調節するには、目標とする充満度制御点の位置をまず指定しなければなりません。そして、アーチがその点を通過するようにする CHT パラメータ (R, r, d) を見つける必要があります。CHTA は、幅・高さ・充満度をすべて満たすパラメータを見つけた過程が非常に複雑です。続く内容では、その理由と共に、3 つの条件をすべて満たす CHTA を作成する方法を説明します。

3.3.4. カートイト・ハイボトロコイド・アーチの特性

望む幅・高さ・充満度を持つ CHTA を作成するには、パラメータ (R, r, d) の変化に応じてアーチの形状がどのように変わるかを理解する必要があります。

図 25 は、 R, r, d をそれぞれ変更した際にアーチがどのように変化するかを示しています。 R が減少すると幅と高さが共に減少し、 r が増加すると幅は増えるが高さは減少します。 d が増加すると幅と高さが共に増加します。ここで注意すべき点は、この図だけでは充満度の変化を判断できないということです。幅と高さが同時に変化したためです。(ただし、先に確認したように、幅と高さを同一に合わせた場合、 R が減少するほど充満度は増加します。)

このように、CHTA は CTDA とは異なり特性が複雑で、望むアーチを得るのは容易ではありません。このため、コンピュータを用いた数多くの反復計算が必要となります。CHTA のパラメータ別の特性を表にまとめると、以下のようになります。表 3 において、幅と高さは単純にパラメータのみを変更した際の結果であり、充満度は幅と高さを同一に維持した際の結果です。

● R を減少させると充満度が大きくなる理由

図 26 は、円が他の円に内接する際、基準となる円の半径 (R) を減少させると、なぜアーチの充満度が大きくなるのか、その原理を示しています。(ちなみに、CTDA の基準線である直線は、半径が無限大の円と考えることができます。)

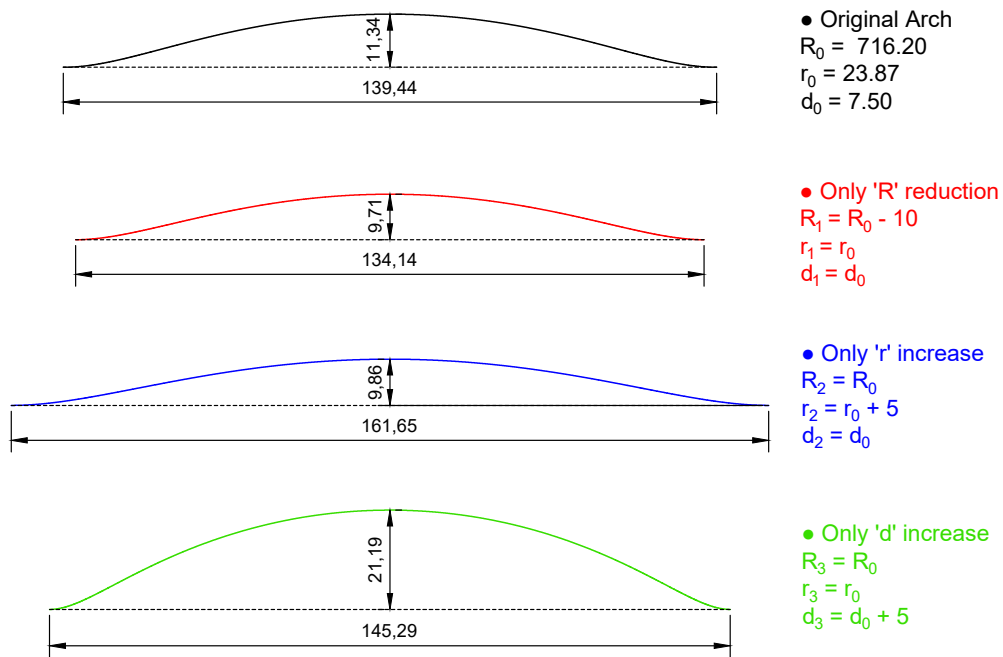


図 25: Change in CHTA shape according to parameter variation

Parameter	Width	Height	Fullness
R −	−	−	−
r +	+	−	·
d +	+	+	·

表 3: Changes in CHTA according to parameter variation. +:increase, −:decrease

図を見ると、CTDA は転がる円が頂点から 180° 回転して初めて端点に到達します。一方、CHTA は 141° 回転するだけで端点に到達します。まさにこの回転角の差が、充満度の変化を生み出します。端点に到達するまでに必要な回転角が減少することで、アーチの端部が頂点に比率的により近くなります。これはアーチ端部の平坦な区間が短くなる効果を生み、結果として充満度がより大きくなるのです。

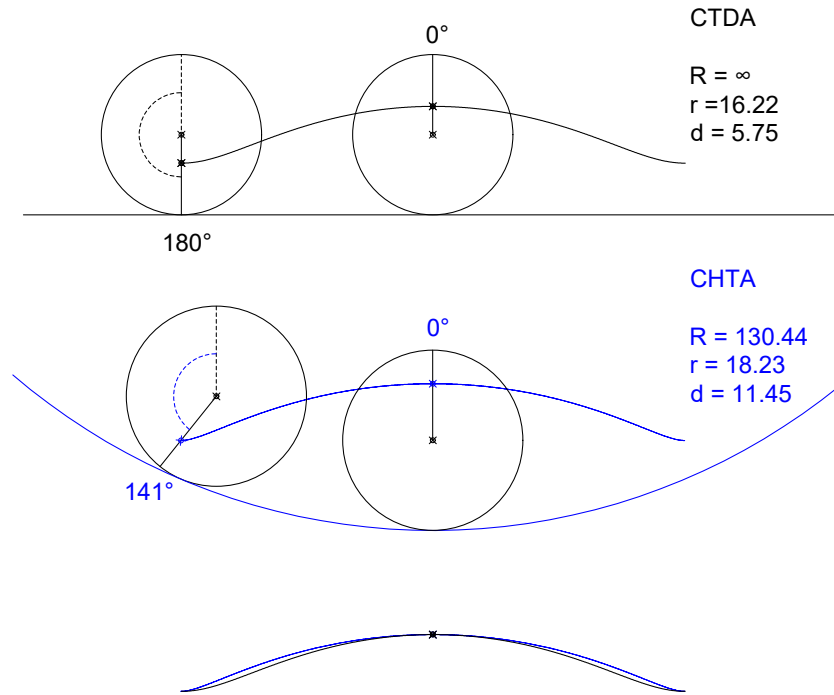


図 26: Change in CHTA according to the value of R

逆に充満度を小さくしたい場合には、これと正反対の原理が適用され、これについては次の章で詳しく説明します。

3.4. カーテイト・エピトロコイド

3.4.1. カーテイト・エピトロコイドの定義

CET は次のように定義します。

定義 3.6. カーテイト・エピトロコイド (Curtate Epitrochoid, CET)

半径が R の大きい円 B の外側を、半径が r の小さい円 A が滑ることなく転がる時、小さい円 A の中心から d だけ離れた点 P が描く軌跡。(ただし、 $d < r, r < R$)

CET と CHT の最も大きな違いは、基準となる大きい円 B の内側ではなく、外側に沿って転がるという点です。

数学的な表現は以下の通りです。

$$\begin{cases} x(\theta) = (R + r) \cos(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R + r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (4)$$

R : 大きい円 B の半径

r : 小さい円 A の半径 (ただし、 $r < R$)

d : 小さい円 A の中心から点 P までの距離 (ただし、 $d < r$)

θ : 小さい円が回転した角度

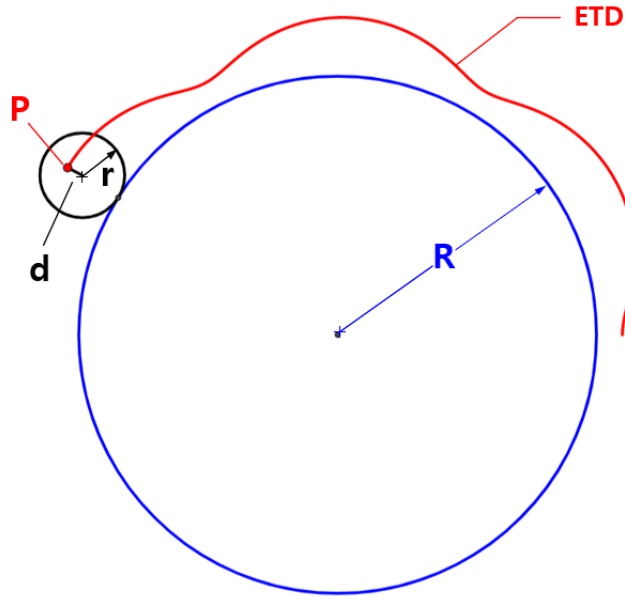


図 27: Epitrochoid

図 27 は CET の一例です。CET も CHT と同様に連続した曲線を生成するため、アーチとして使用するにはこの曲線から必要な区間を抽出しなければなりません。このように CET から抽出したアーチを「CETA (Curtate Epitrochoid Arch)」と呼び、アーチの頂点と端点を次のように定義します。

定義 3.7. CETA の頂点

大きい円 B の中心から最も遠い軌跡上の点

定義 3.8. CETA の端点

大きい円 B の中心と頂点を結ぶ線に垂直な直線が接線となる、軌跡上の二つの点。この二点は頂点を基準に左右対称の位置にある。

CET からアーチを抽出する方法は CHT と若干異なり、その過程は以下の通りです。

3.4.2. カーテイト・エピトロコイドからのアーチ抽出

1. CET 曲線を描く。
2. 大きい円 B の中心から最も遠い、隣接する三つの点のうち、両端の二点を仮の端点と定める。^{*4}
3. 二つの仮の端点の間の区間を抽出し、仮のアーチを作成する。
4. 仮のアーチの両端点が水平になるように、仮のアーチを回転させる。
5. 回転させた仮のアーチから、接線の傾きが '0' になる地点、すなわち実際のアーチの端点を見つける。
6. アーチの端点間の区間を再抽出する。

^{*4} 中央の点はアーチの頂点

3.4.3. カーテイト・エピトロコイド・アーチの充満度

充満度に関する内容は、先に説明した CHTA の場合と同一です。(Chapter 3.3.3 参照)

3.4.4. カーテイト・エピトロコイド・アーチの特性

図 28 は、 R, r, d の値を変更した際にアーチの形状がどのように変化するかを示しています。 R が減少すると幅と高さが共に増加し、 r が減少すると両方とも減少し、 d が減少すると幅は増えるが高さは減少します。また、CHTA の場合と同様に、この図だけでは充満度の変化を判別することはできません。

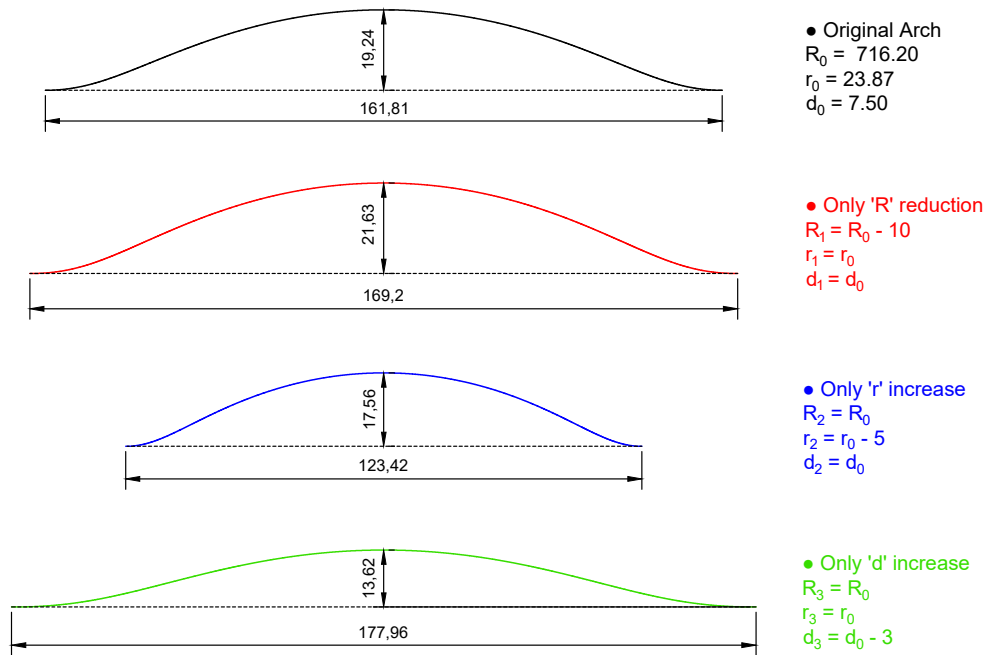


図 28: Change in CETA shape according to parameter variation

CETA の特性を表にまとめると表 4 のようになります。CHTA と同様に、表中の幅と高さは単純にパラメータを変更した際の結果であり、充満度は幅と高さが同一に維持された場合の結果です。

Parameter	Width	Height	Volume
R –	+	+	–
r –	–	–	.
d –	+	–	.

表 4: Changes in CETA according to parameter variation. +:increase, -:decrease

● R を減少させると充満度が小さくなる理由

図 29 は、円が他の円に外接する際、基準となる円の半径（ R ）を減少させると、なぜアーチの充満度が小さくなるのか、その原理を示しています。（ちなみに、CTDA の基準線である直線は、半径が無限大の円と考えることができます。）

図を見ると、CTDA は転がる円が頂点から 180° 回転して初めて端点に到達します。一方、CETA は 218° 回転する必要があります。このように、端点に到達するまでに必要な回転角が増えることで、アーチの端部は頂点から比率的により遠くなります。これはアーチ端部の平坦な区間が長くなる効果を生み、結果として充満度が減少することになります。

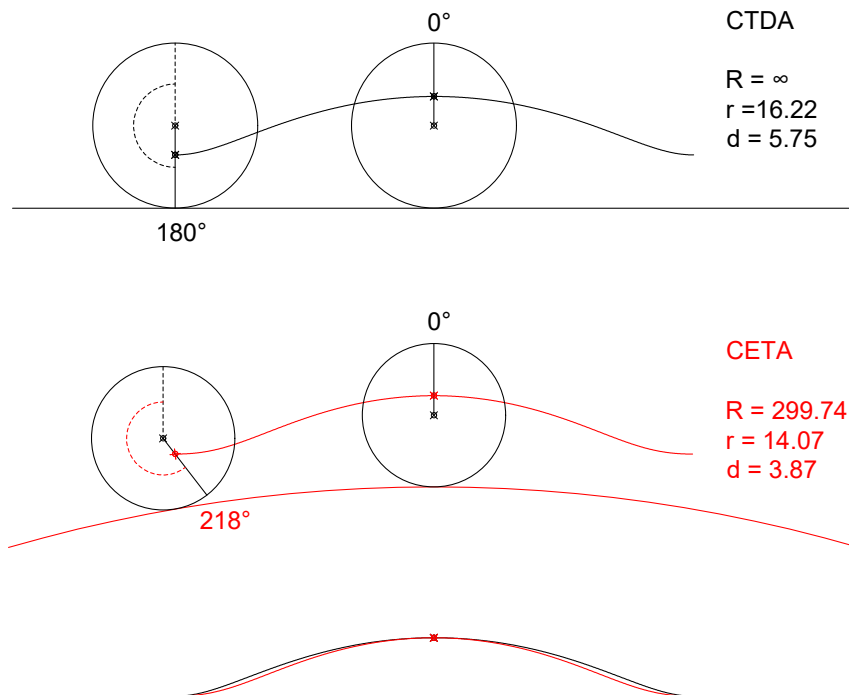


図 29: Change in CETA according to the value of R

4. トロコイド・アーチの作成

作成目標のアーチの充満度が、同じ幅と高さを持つ CTDA の充満度より大きい場合は CHTA を、小さい場合は CETA を作成します。充満度が同じであれば（確率的には非常に稀ですが）、CTDA を作成します。

4.1. カーテイト・トロコイド・アーチの作成

前章 3.2.1 で説明したように、CTDA は生成原理が単純です。したがって、望むアーチの幅と高ささえ分かれば、直ちに作成することができます。

例えば、幅が 100、高さが 15 の CTDA を作成すると仮定してみましょう。（式）3 に従って r と d の値を求め、これらの値を数式に代入すれば、曲線を簡単に得ることができます。

$$\begin{cases} r = W/2\pi = 100/(2 * 3.14) = 15.92 \\ d = H/2 = 15/2 = 7.5 \end{cases} \quad (5)$$

4.2. カーテイト・ハイポトロコイド・アーチの作成

CHTA は、CTDA より充満度が大きいアーチを作成するために使用します。その生成過程は CTDA から始まります。CTDA は、基準となる大きい円の半径 (R) が無限大の状態（直線）と同じであるため、この R の値を徐々に減少させながら望むアーチを探し出すのです。詳細な方法は以下の通りです。

1. 目標アーチの充満度が CTDA より大きいかわかりかを判別し、大きい場合は CHTA を生成する。
2. R の初期値を決定する。^{*5} 完成した CHTA は、ほとんどの場合 R の値が $400r$ を超えないため、余裕を持って $500r$ (r の値の 500 倍) 程度から始めるのが良い。
3. 設定した R の初期値で、アーチの幅と高さが目標値に達するまで、 r と d を少しずつ増やしながら反復計算する。
4. 幅と高さが目標値と等しくなったら、充満度を確認する。もし充満度が不足していれば、 R の値を減少させる。
5. 減少させた R の値で、再び幅と高さが目標値に達するまで、 r と d を増やしながら計算する。
6. 幅、高さ、充満度がすべて目標値を満たすまで、上記の 4~5 の過程を繰り返す。

上記の方法は、計算過程を簡単に要約したものです。実際には、デジタル量子化誤差や計算所要時間といった問題により、はるかに複雑な演算が必要です。反復計算時に R の値を減少させていく理由は、充満度を徐々に高めるためです。 R の値が小さくなるとアーチの幅と高さも共に減少しますが、これを目標値に戻すために r と d は常に増加させる方向に調整します。このとき、 d を増やすと幅と高さが共に増加しますが、 r を増やすと高さはむしろ減少する特性があります。この差を利用して r と d を適切に調節しながら、幅と高さを合わせていくのです。

4.3. カーテイト・エピトロコイド・アーチの作成

CETA は、CTDA より充満度が小さいアーチを作成する際に使用します。生成原理は CHTA と同様に CTDA から出発します。すなわち、基準円の半径 (R) が無限大の状態から始め、 R の値を徐々に減少させながら望むアーチを探し出します。詳細な方法は以下の通りです。

^{*5} 無限大から始めるのではなく、一定の値から始める。無限に大きい数を使用すると、計算時間も無限に長くなるため

1. 目標アーチの充満度が CTDA より大きい小さいかを判別し、小さい場合は CETA を生成する。
2. R の初期値を決定する。(一般的に CETA は CHTA より R の値が少し大きい。)
3. 設定した R の初期値で、アーチの幅と高さが目標値に達するまで、 r と d を少しずつ減らしながら反復計算する。
4. 幅と高さが目標値と等しくなったら、充満度を確認する。もし充満度が過剰であれば、 R の値を減少させる。
5. 減少させた R の値で、再び幅と高さが目標値に達するまで、 r と d を減らしながら計算する。
6. 幅、高さ、充満度がすべて目標値を満たすまで、上記の 4~5 の過程を繰り返す。

反復計算時に R の値を減少させていく理由は、充満度を徐々に下げるためです。CETA は R の値が小さくなると幅と高さがむしろ増加するため、これを目標値に戻すために r と d は常に減少させる方向に調整します。

4.4. 作成できないトロコイド・アーチ

CHTA と CETA で調節できる充満度には限界があります。このため、望むアーチを作成できない場合があります。このような限界は、次のように大きく二つに分類でき、どちらの場合も近似曲線を代替案として用います。

4.4.1. アーチが存在しない場合

これは、CHT、CET 曲線自体は生成されるものの、その中からアーチ形状 (CHTA、CETA) を抽出できない場合です。例えば、充満度を過度に高めるために R 値を下げすぎると、CHT 曲線は作成されますが、アーチの基本条件を満たす区間が失われてしまいます。

CHTA と CETA は、充満度を無限に大きくしたり小さくしたりすることはできません。特定の限界点を超えると、曲線がアーチの基本条件を満たさなくなるためです。図 30 のように R 値を下げすぎると、生成された CHT 曲線にはもはやアーチとして定義できる区間が存在しなくなります。

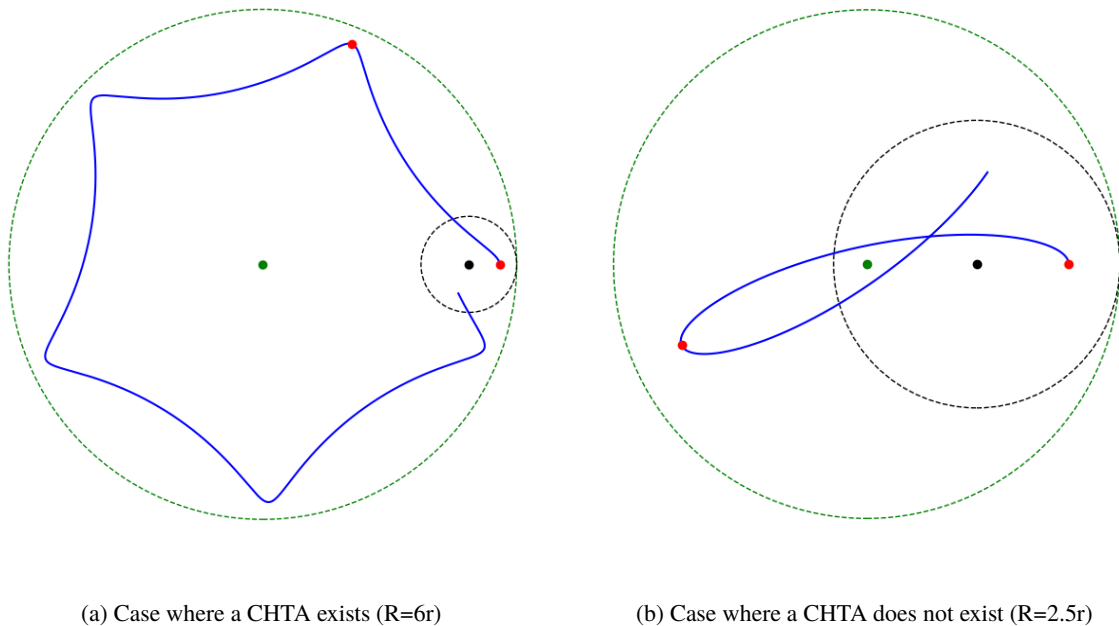


図 30: Existence of an arch segment in a CHT curve

幅と高さが固定された状態でトロコイドで作成できる最大の充満度を持つアーチを「maxCHTA」、最小の充満度を持つ

つアーチを「minCETA」と呼ぶことにします。実際に、モデル A、B、C の裏板の 5 番アーチは、ほとんどが maxCHTA よりも充満度が大きいです。このようにトロコイドの限界を超えるアーチを再現するには、次章で説明する近似曲線が必要です。

4.4.2. アーチは存在するが作成できない場合

理論的には CHTA、CETA は存在しますが、計算上の限界により作成できない場合があります。デジタル計算過程で発生する誤差、精度、最適化エラーなどにより、正確な解を見つけられないことを指します。

TD 曲線は本来連続的な線ですが、コンピュータはこれを無数の点の集合（離散値）として表現します。もし私たちが探している正確な解がこの点と点の間に存在する場合、コンピュータはその解を見つけられず、計算に失敗することがあります。

このようなデジタル量子化問題のため、計算過程では適切な妥協が必要です。もし妥協点を誤って設定すると、計算に失敗したり、時間が幾何級数的に増加したりする可能性があります。したがって、このような場合にも近似曲線を使用することが効率的です。

5. トロコイド近似曲線

目標アーチの充満度が、CHTA や CETA で表現できる範囲（maxCHTA, minCETA）を逸脱して存在しないか、あるいは範囲内に存在しても計算上の問題で作成できない場合には、目標値に類似したアーチを代わりに作成して使用するほかありません。

例えば、作成可能な充満度の最大値が 10 であるのに 12 のアーチが必要な場合、まず充満度 10 のアーチを作成した後、これを変換して 12 にします。別の例として、充満度 7 のアーチの計算に失敗した場合は、代わりに充満度 6.9 のアーチを作成し、7 になるように変換します。図 31 のように、何らかの理由で目標点 Z_1 や Z_2 を通る曲線を作成できない場合、作成可能な Z_0 を通る曲線を生成した後、これを変換して Z_1 や Z_2 を通るようにするという原理です。

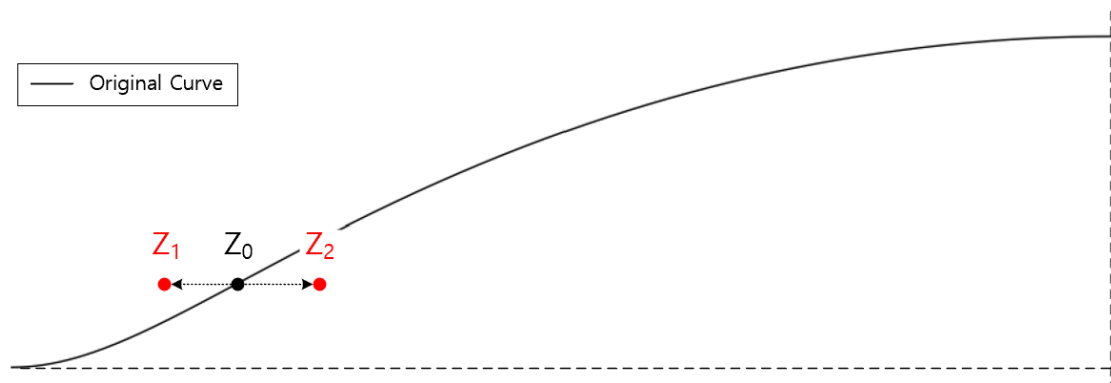


図 31: Concept of the approximation curve

このように、何らかの問題で目標アーチを直接作成できない場合に、達成可能なアーチをまず作成し、これを変換して得られる曲線を「近似アーチ」または「近似曲線（Approximated Arch/Curve）」と呼ぶことにします。以下では、近似曲線の原理と作成法について見ていきます。

なお、「近似曲線」という概念は 1～5 番アーチにのみ適用されます。6 番アーチの作成方法もこれと類似していますが、CHTA や CETA に似せて作成することが目的ではないため、「近似」とは呼びません。

厳密に言えば、目標曲線が理論的に存在しない場合（例：充満度が maxCHTA を超える場合）に作成する曲線は、近似というよりは創作に近いです。一方、曲線は存在するが計算上の理由で作成できない場合の結果物は近似と言えます。しかし、本報告書では便宜上、両方のケースを近似曲線と総称します。

5.1. 近似曲線の基本原理

近似曲線は、元となる CHTA や CETA の充満度を調節して作成します。その原理は、元となる曲線を構成する無数の点を水平に移動させることです。この際、元となる曲線が持つ緩やかな S 字形状を維持し、アーチの両端点と頂点における接線の傾きが '0' を満たす必要があります。そのためには、曲線の各点ごとに異なる移動量を適用しなければなりません。

例えば、アーチの頂点と端点は動かしてはなりません。そして、中央部に向かうほど移動量を増やし、両端に向かうほど移動量を減らさなければ、全体的なアーチの形状を維持することはできません。このように、各点の水平移動量を決定するためには、一定の規則、すなわちパターンが必要です。

図 32 は、点の水平移動パターンを説明しています。(a) は充満度を大きくする場合、(b) は充満度を小さくする場合です。

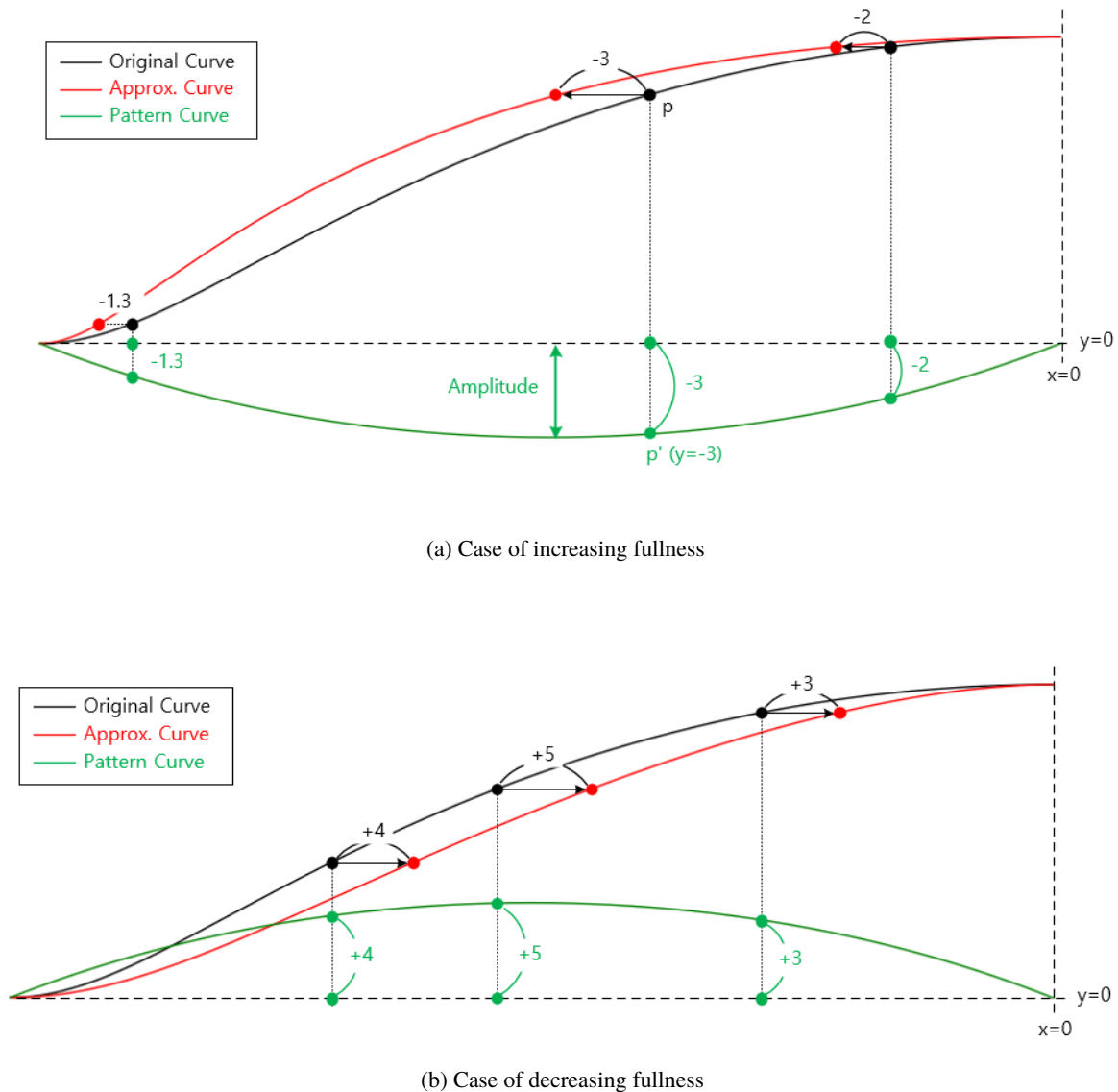


図 32: Principle of creating an approximation curve using a pattern curve

元のアーチ（黒色）の頂点と端点は固定し、中央部のみを移動させなければなりません。このとき、移動量は中央に近づくほど大きくなり、両端に近づくほど小さくなる必要があります。このような規則を示すパターンは、滑らかな曲線形状でなければなりません。また、このパターン曲線の両端は、元のアーチの頂点および端点と x 軸の位置が同じでなければならず、 y 値は '0' でなければなりません。

このような移動パターンを示す曲線を「変換パターン曲線 (Transformation pattern curve)」または略して「パターン曲線 (Pattern curve)」と呼ぶことにします。パターン曲線の形状は最終的な近似曲線の形状を、パターン曲線の振幅（高さ）は充満度の変化量を決定します。すなわち、振幅が大きいほど各点の移動量が大きくなり、充満度の変化もまた大きくなります。

パターン曲線は、元のアーチの各点を水平にどれだけ移動させるかを示す役割を果たします。例えば、図 (a) で元のアーチの一点 p をどれだけ移動すべきかを知るには、 p と x 軸の位置が同じパターン曲線上の点 p' を見つければよいのです。もし p' の y 値が-3であれば、点 p を x 軸方向に-3、すなわち左に3だけ移動させればよいのです。このように、元のアーチのすべての点をパターン曲線の y 値を参考にして水平に移動させると、新しい近似曲線が作成されます。

パターン曲線が上に凸か下に凸かによって、アーチの充満度が大きくなるか小さくなるかが決まります。上の図はアーチの左半分を例に挙げています。この場合、点を左に移動させると充満度が増加し、右に移動させると減少します。したがって、パターン曲線が下に凸 ($-y$ 値) であれば充満度が増加し、上に凸 ($+y$ 値) であれば充満度が減少します。アーチの右半分を変換する際には、この方向が逆になります。

それでは、どのような曲線をパターン曲線として使用すべきでしょうか。近似曲線の目的は、元のトロコイド・アーチの形状を最大限維持しつつ、充満度だけを変更することです。したがって、あるパターン曲線で作成した近似曲線が、目標の充満度と同一の（実際に存在する）トロコイド・アーチと完全に一致するならば、そのパターン曲線が最も理想的であると言えます。

パターン曲線の候補としては、円弧、楕円、カテナリー (Catenary curve) など、様々な曲線が考えられます。いくつかの曲線を試した結果、わずかな違いがあるだけで、理想的な曲線は見つかりませんでした。その中で最も結果が良かったのはカテナリー曲線でした。しかし、カテナリー曲線だけでは満足のいく近似曲線を得ることが難しかったため、これを基本としつつ、若干の修正を加えて最終的なパターン曲線を作成することにしました。

今後、便宜上、CHTA を元にして作成した近似曲線は nCHTAce、CETA を元にした場合は nCETAice、CTDA を元にした場合は CTDAce または CTDAice と表記します。(付録の短縮表記参照)。

5.2. パターン曲線の作成

パターン曲線にはカテナリー曲線を使用します。この曲線の形状を少しずつ修正しながら作成される近似曲線を観察する方式で、最適なパターンを探します。

まず、アーチの幅と高さがすべて同じであるという条件下で、次の4つの曲線を比較します。

- 元の曲線 A : CTDA
- 目標曲線 B : 目標の充満度制御点 Z を通る CHTA
- パターン曲線 C : 近似曲線 D を作成するためのカテナリー曲線
- 近似曲線 D : 元の曲線 A をパターン曲線 C で変換し、充満度制御点 Z を通るように作成した結果の曲線

この過程は、近似曲線 (D) が目標曲線 (B) とどれほど類似しているかを確認するためのものです。もし B と D が完全に重なれば、変換に使用されたパターン曲線は理想的であると言えます。一致しない場合は、その差を見てパターン曲線をどのように修正すべきかを判断できます。図 33 は、これら4つの曲線を共に示しています。

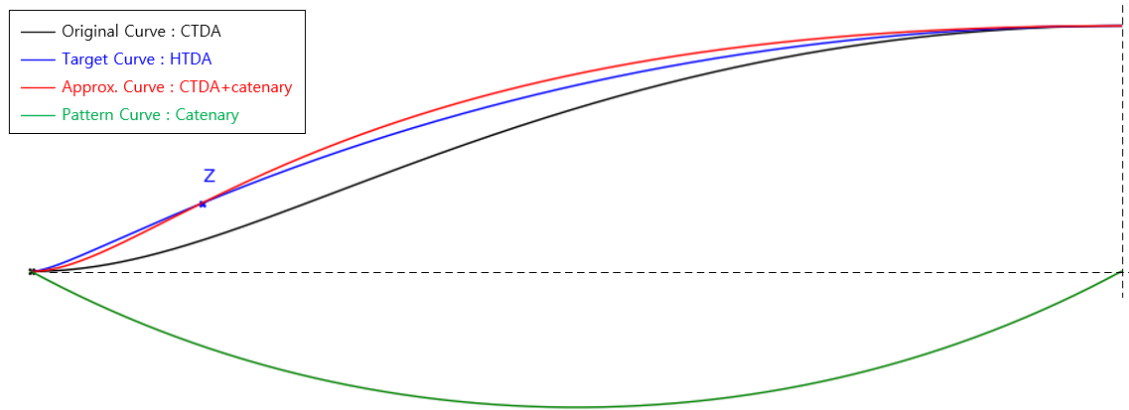


図 33: Approximation curve using a catenary curve

図において、近似曲線（赤色）は充満度制御点 Z を基準に、アーチの端部側では充満度が不足し、頂点側では過剰な様子を見せています。これはすなわち、パターン曲線（緑色）がアーチの端部側では十分な変換を与えられず、頂点側では過剰な変換を与えていることを意味します。この問題を解決するには、現在下に凸であるカテナリー曲線の頂点をアーチの端部側に移動させる必要があります。このような頂点の移動は、曲線を一方に密集させることと同じであり、カテナリー曲線に指数関数を適用することで実現できます。指数値が「+」であれば曲線は左に、「-」であれば右に密集します。

カテナリー曲線に指数関数を適用する方法は以下の通りです。まず、 x 軸自体に指数関数を適用して軸を歪めます（伸ばしたり縮めたりします）。次に、歪ませた x 軸上に元のカテナリー曲線を描き、最後に x 軸を再び元に戻します。
(-図 34-)

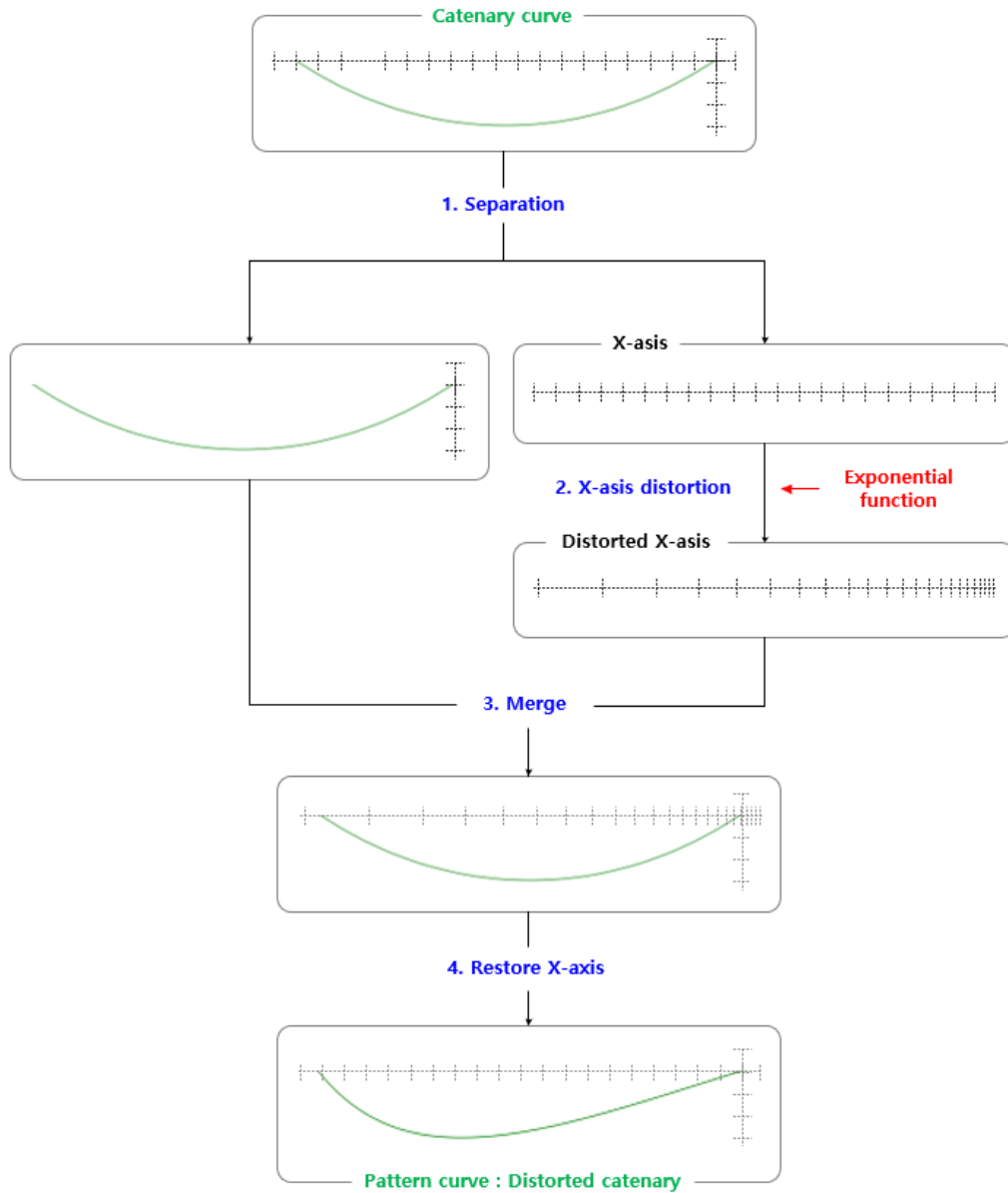


図 34: Method of applying an exponential function to a catenary curve

上記の方法でカテナリー曲線の頂点の位置を移動させて（一方に密集させて）再度作成した近似曲線は、図 35 のように変わります。

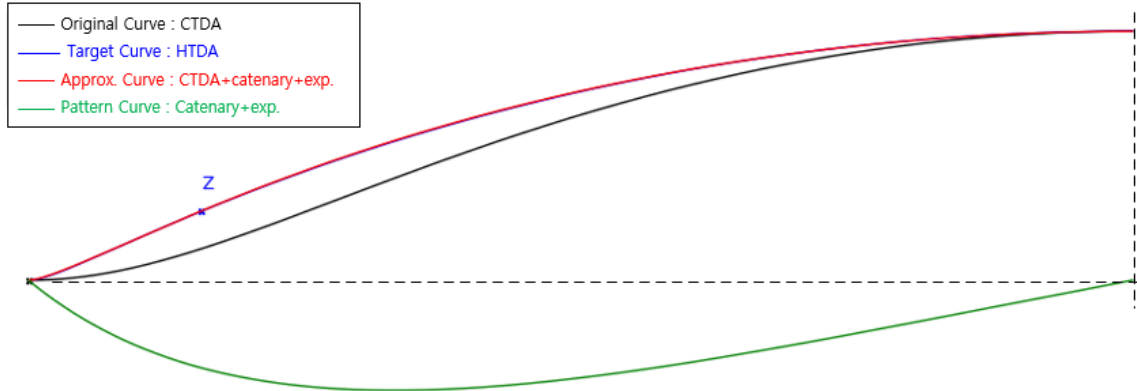


図 35: Approximation curve using an exponentially distorted catenary curve

図を見ると、目標曲線（青色）と近似曲線（赤色）がほぼ一致していることが分かります。この時に使用された指数値は、現在のアーチの幅と高さに最も適した値です。アーチの幅と高さが同じであれば、充満度の大きさに関わらず、この最適な指数値を同じように使用できます。ただし、この値は充満度を大きくする場合にのみ該当します。充満度を小さくする場合には、パターン曲線の頂点の移動方向が逆になるため、異なる符号と異なる大きさの最適な指数値を別途見つける必要があります。

最適な指数値を見つける作業は、コンピュータの反復計算によって行われます。近似曲線と目標曲線の差を誤差面積として計算し、この面積が最も小さくなる指数値を選択するのです。

以下は、この過程に関する数学的な説明です。

カテナリー曲線の定義と一般式は以下の通りです。

定義 5.1. カテナリー曲線 (Catenary curve)

両端が固定された、柔軟で伸びず、密度が均一な紐が、重力によって自然に垂れ下がった時に生じる曲線

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (6)$$

ここで、 a は曲線の最低点から x 軸までの距離を示す定数で、曲線の幅と形状を決定します。本報告書では、特定の区間 (x_s, x_e) の両端点の移動量を '0' に固定し、振幅 (A) を調節できるよう、以下のように式を変形して使用します。

$$y = A \left[\cosh\left(\frac{x' - x_c}{w}\right) - \cosh(1) \right] \quad (7)$$

ここで、 x_c は曲線の中心、 w は幅を決定し、 x' は関数に入力される最終座標です。

曲線を非対称にするため、入力座標 x' は、元の x 座標 x_o を指数関数で歪ませて生成します。この過程は、 x_o を $[0, 1]$ の範囲に正規化した後に適用されます。

$$x' = \left(\frac{e^{\left(\frac{x_o - x_s}{L}\right) \cdot \text{expo}} - 1}{e^{\text{expo}} - 1} \right) \cdot L + x_s, \text{ where } L = x_e - x_s \quad (8)$$

上記の式を組み合わせた最終的な「指数歪みカタナリー関数」は以下の通りです。

$$y(x_o) = A \cdot \left(\cosh \left(\frac{x' - x_c}{w} \right) - \cosh(1) \right) \quad (9)$$

x_o : 元の X 座標

A : 曲線の全体的な振幅を決定する係数

x' : 関数に入力される最終座標

x_s, x_e : 曲線の x 軸範囲

expo : 指数歪みの強度と方向を決定する係数

x_c, w : カテナリー曲線の中心および幅の係数 ($x_c = \frac{x_s + x_e}{2}, w = \frac{L}{2}$)

6. トロコイド近似曲線の作成

近似曲線は、次の二つの場合に分けて作成します。第一は、目標アーチが理論的に存在しない場合、第二は、存在するが計算上の問題で作成できない場合です。

6.1. アーチが存在しない場合

作成手順は以下の通りです。

1. 目標アーチと幅、高さが同じ CTDA と maxCHTA（または minCETA）をそれぞれ生成する。
2. パターン曲線の指数値と振幅を調節し、CTDA を変換した近似曲線が maxCHTA（または minCETA）に最も類似する最適な指数値を見つける。
3. 先に見つけた最適な指数値をパターン曲線に適用する。次に、振幅を再調整して maxCHTA（または minCETA）を変換することにより、最終的な近似曲線である nCHTAce（または nCETAice）を完成させる。

（※ 近似曲線の誤差を減らすためには、次の点に留意する必要があります。指数値を決定する際には、二つの曲線が作る閉曲線の面積（誤差面積）を計算し、この面積が最も小さくなる指数値を選択します。しかし、誤差面積が小さくても、曲線の全体的な形状が異なる場合があります。したがって、標準偏差を併せて比較し、誤差面積と標準偏差の両方がバランス良く小さい値を選択しなければなりません。）

6.2. アーチは存在するが計算上の理由で作成できない場合

作成手順は以下の通りです。

1. 目標アーチと幅、高さが同じ CTDA と maxCHTA（または minCETA）をそれぞれ生成する。
2. パターン曲線の指数値を調節し、CTDA を変換した近似曲線が maxCHTA（または minCETA）に最も類似する最適な指数値を見つける。
3. 目標曲線と充満度が最も近く、かつ計算可能な nCHTA（または nCETA）を元の曲線として生成する。
4. 先に見つけた最適な指数値をパターン曲線に適用する。次に、振幅を調節して 3 で作成した元の曲線（nCHTA）を変換した近似曲線が、目標の充満度制御点を通るようにする。
5. 上記の過程で見つけた指数値と振幅を利用して nCHTA（または nCETA）を変換し、最終的な近似曲線である nCHTAce（または nCETAice）を完成させる。

もし目標曲線が CTDA に非常に類似している場合、パラメータ R の値が非常に大きくなり、計算に大きな負荷（時間、精度など）がかかる可能性があります。したがって、この場合にも近似曲線を使用することが効率的です。このとき、元の曲線として nCHTA（または nCETA）の代わりに CTDA を使用し、生成された近似曲線は CTDAce（または CTDAice）と表記します。

（※ 近似曲線の誤差を減らすためには、次の点に留意する必要があります。第一に、パターン曲線の指数値を探す際には、変位が最も大きい場合を基準としなければなりません。すなわち、元の曲線は CTDA、目標曲線は maxCHTA（または minCETA）と設定して計算します。第二に、最終的な近似曲線を作成する際には、元のアーチとして目標の充満度制御点に最も近く、かつ計算可能な CHTA（または CETA）を使用しなければなりません。第三に、誤差面積と標準偏差を併せて考慮し、最適な指数値を選択しなければなりません。）

7. 6 番アーチ

1～5 番アーチの幅は主にプレートの幅によって決まりますが、その高さは 6 番アーチの形状によって決定されます。したがって、6 番アーチは再現過程において最も重要な段階であると言えます。

6 番アーチは他のアーチより充満度が大きく、頂点付近が平坦に長く続く形状をしています。このような特徴のため、一般的な CHTA では再現が不可能です。したがって、別途のパターン曲線を利用して CTDA を変形させて作成する必要があります。

7.1. 6 番アーチ作成の原理

6 番アーチは他のアーチと形状が異なるため、形状を決定するには追加の基準点が必要です。1～5 番アーチは頂点・両端点・充満度制御点の計 3 つの点で定義しましたが、6 番アーチは最低でも 2 つ以上の基準点がさらに必要です。また、1～5 番アーチは左右対称ですが、6 番アーチは非対称であるため、アーチの頂点を基準に上部と下部に分けて作成する必要があります。^{*6}

6 番アーチの形状を決定する追加の基準点としては、等高線の位置を示す点（以下「等高点」）のうち、1 番目と 4 番目の点を使用します。再現曲線は充満度制御点 Z を必ず通過しなければなりません。しかし、 Z を基準としてアーチの端部側と頂点側の部分的な充満度は、パターン曲線の形状によって変わり得ます。したがって、これら二つの部分の充満度を確認し調節するために、1 番目と 4 番目の等高点を追加の基準点として使用するのです。

理想的には、再現曲線はすべての等高点と 1～5 番アーチの位置点を通過すべきです。しかし、先に見たように、モデルの等高点の位置には誤差があり、表面が均一ではありません。したがって、位置的に最も適したいくつかの点を基準点として選択することが合理的です。充満度制御点（2 番目の等高点）は必ず通過しなければならないため、その両側に基準点の一つずつ配置します。アーチの端部側には 1 番目の等高点を、頂点側ではパターン曲線の形状変化に最も敏感に反応する 4 番目の等高点を基準点として選択します。

再現曲線は、アーチの端点と点 Z 、アーチの頂点を必ず通過します。この状態で、1 番目と 4 番目の等高点も通過するかを確認します。もし曲線が等高点の上を通過すれば充満度が過剰であり、下を通過すれば不足していることになります。この結果を基にパターン曲線の形状を調整し、再現曲線がこれら二つの等高点も通過するようにします。

このように、6 番アーチの形状を決定するために追加された二つの基準点を「形状制御点 (Shape control point)」と呼ぶことにします。充満度制御点を基準にアーチの端部側にあるものを「下部形状制御点 (Shape control point-bottom)」、頂点側にあるものを「上部形状制御点 (Shape control point-top)」と定義します。したがって、下部形状制御点は 1 番目の等高点、上部形状制御点は 4 番目の等高点となります。しかし、充満度制御点と同様に、等高点を形状制御点として使用したのは単に便宜上のものです。再現対象のアーチ上の点であれば、どの点でも制御点として使用できます。私たちが等高点の位置の値をあらかじめ知っているために選択しただけであり、上部形状制御点として 4 番目の代わりに 5 番目や 6 番目の等高点を使用しても差し支えありません。

6 番アーチのためのパターン曲線は、「3 次多項式曲線」と「指数曲線」および「カテナリー曲線」を混合して作成します。カテナリー曲線は全体的な充満度を調節し、再現曲線が充満度制御点を通過するようにします。3 次多項式曲線はアーチの全体的な形状を調整し、指数曲線は形状をより細かく調整する役割を果たします。したがって、アーチ

^{*6} モデルのアーチは左右対称ではないため、本書では 1～5 番アーチについてもアーチの左右を区別してそれぞれ再現する。

を再現する際には、これら三つの曲線のパラメータ（振幅、指数値など）を適切に組み合わせる必要があります。

7.2. パターン曲線の作成

3 次多項式曲線はカタナリー曲線と似ていますが、一方がより平坦な非対称の形状をしています。まるでスプーンのように、一方は凹んでおり（スプーン部分）、反対側は長く伸びた形状（柄の部分）です。この柄の長さや位置（左／右）、そして曲線の振幅によって、再現されるアーチの姿が変わります。例えば、左半分のアーチを生成する場合、柄が左側にあれば、再現アーチは端部の充満度は小さくなり、頂点に近づくほど充満度が大きくなる効果（傾斜が急になる効果）が現れます。柄の長さは、3 次多項式曲線に指数関数を適用して調節します。すなわち、曲線を左または右に密集させるのです。指数値が「+」であれば左に、「-」であれば右に密集します。一般的に柄は左に置きますが、場合によっては右に置くこともあります。

以下は、3 次多項式曲線に関する説明です。

定義 7.1. 3 次多項式曲線 (Cubic polynomial curve)

変数 x の最高次項が 3 次 (x^3) である $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の形で定義される曲線。最大二つの極値を持ち、単純な放物線より複雑な S 字形状の滑らかな曲線を作り出す。

本報告書で使用する 3 次多項式曲線の基本形状は、次の数式で定義されます。

$$y = x^2(x - 1) \quad (10)$$

最終的なパターン曲線は、「指数関数が適用された 3 次多項式曲線」と「カタナリー曲線」を足し合わせて作成します (図 36)。まず、カタナリー曲線と 3 次多項式曲線をそれぞれ準備します。次に、3 次多項式曲線の x 軸を指数関数で歪ませて形状を変形し（柄の長さを調節）、このように変形された 3 次多項式曲線をあらかじめ準備したカタナリー曲線と足し合わせると、最終的なパターン曲線が完成します。（3 次多項式曲線に指数関数を適用する方法は図 34 を参照）

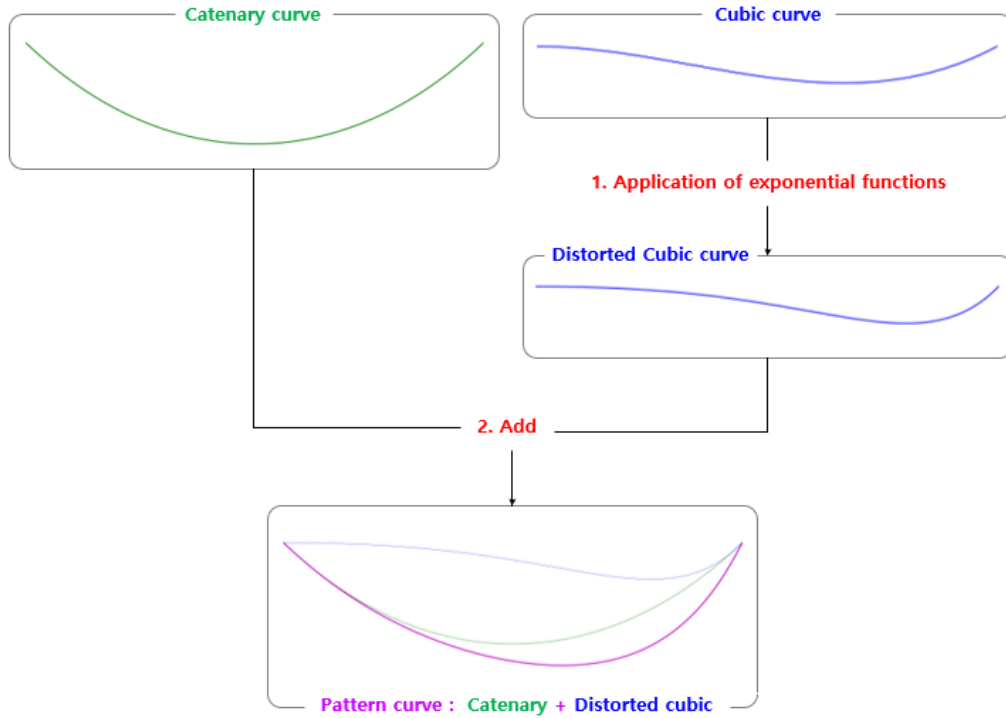
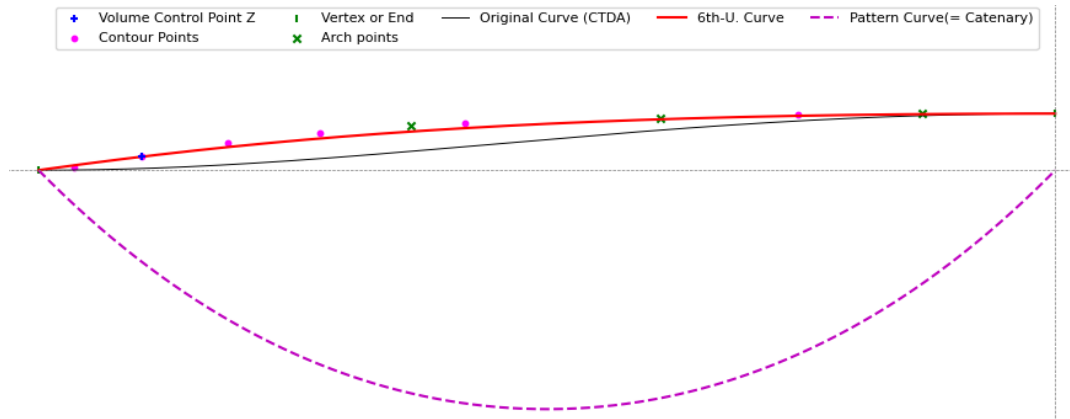
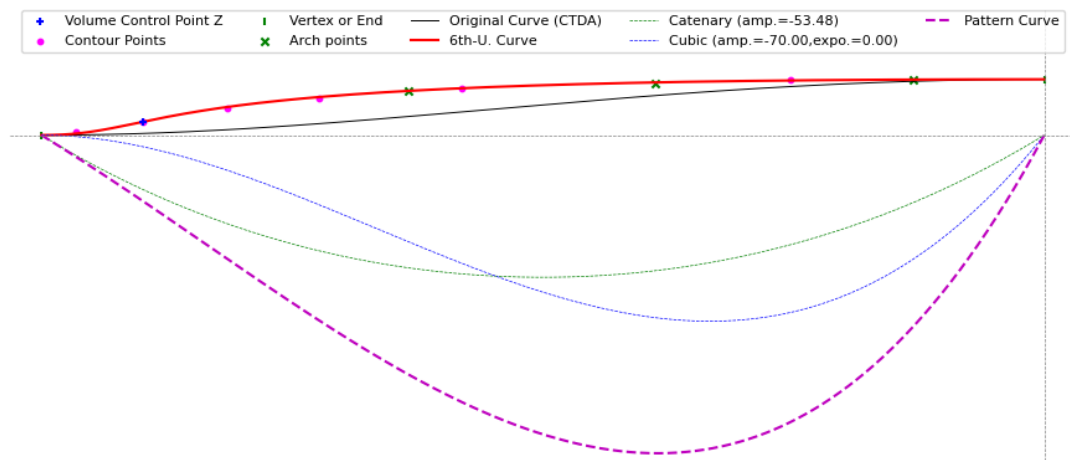


図 36: Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve

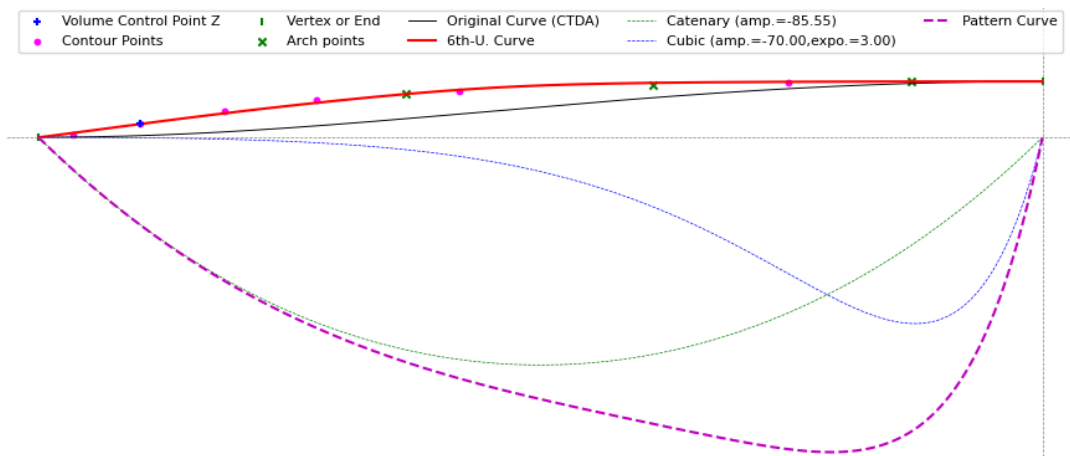
図 37 は、パターン曲線の各要素を適用するたびに、再現曲線がどのように変化するかを示しています。
(※ 例の図であるため、各パラメータは任意に設定されています。)



(a) Result of using only a catenary curve as the pattern curve



(b) Result of adding a cubic polynomial curve to (a)



(c) Result of applying an exponential function to the cubic polynomial curve in (b)

図 37: Change in the reconstruction curve according to the combination of pattern curve elements

充満度制御点 Z を基準に見ると、(a) は端部側の充満度は過剰で、頂点側は不足しており、(b) はその逆です。(c) は (a) より目標曲線に少し近づいた状態です。このように三つの関数を組み合わせることで、再現曲線の形状を自由に調

節できますが、最適なパラメータを見つける作業は容易ではありません。まず、カテナリー曲線の振幅は、再現曲線が充満度制御点 Z を通過するまで反復計算して見つけます。次に、3 次多項式曲線の振幅と指数関数の指数値は、再現曲線が 1 番目と 4 番目の等高点をすべて通過するように値を変更しながら、反復計算を通じて見つけなければなりません。

図 38 は、上記のような反復計算を通じて最適なパラメータを見つけ、適用した最終結果です。前の例の図と比較すると、再現曲線が等高点の位置と非常によく一致していることが確認できます。

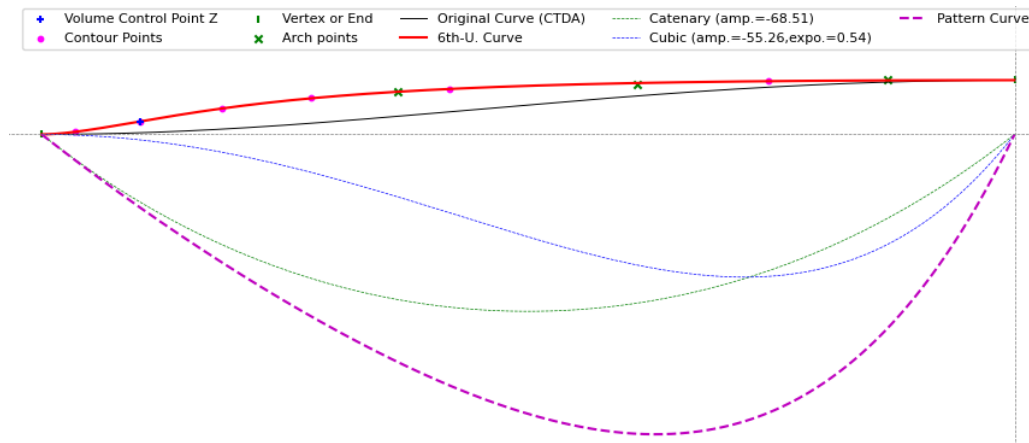


図 38: Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve (Optimized)

このように、形状制御点と充満度制御点の位置を適切に指定し、再現曲線がこれらの点をすべて通過するようにパターン曲線を調整すれば、多様な形状のアーチを精巧に作り出すことができます。

7.3. 6 番アーチの作成手順

6 番アーチの再現手順は以下の通りです。

1. 充満度制御点 Z と上・下部形状制御点の位置を指定する。
2. 再現するアーチと幅、高さが同じ CTDA を元の曲線として生成する。
3. パターン曲線に使用するカテナリー曲線と 3 次多項式曲線を準備する。
4. 再現曲線が充満度制御点と上・下部形状制御点をすべて通過するように、3 次多項式曲線に適用する指数値と各曲線（3 次多項式、カテナリー）の振幅を 0 から少しずつ増やしながら最適な値を見つける。
5. 見つけ出した指数値と二つの振幅値を適用して、最終的なパターン曲線を完成させる。
6. 完成したパターン曲線を利用して、2 で作成した CTDA を変形させ、最終的なアーチを生成する。

8. ストラディバリ・アーチの再現

これまで説明した方法を用いて、実際にモデル A、B、C、D のアーチを再現します。ただし、6 番アーチは特性上、まとめて別途表示しました。続く表 6～5 には、再現に使用されたパラメータ値やアーチタイプなど、すべての関連情報を要約しました。

1～5 番アーチは、表板と裏板、そして左側（ベースパー側）と右側（サウンドポスト側）に分けて再現します。まず CHTA または CETA での再現を試み、不可能な場合にのみパターン曲線を用いた近似曲線（nCHTAce、nCETAice など）を作成します。充満度制御点 Z の位置は、すべて 2 番目の等高点に統一しました。

6 番アーチは頂点を基準に上部と下部に分けて再現し、パターン曲線で CTDA を変形させて作成します（CTDAce）。充満度制御点 Z は 2 番目の等高点に、下部形状制御点は 1 番目の等高点に統一しました。上部形状制御点の場合、モデル A、B、C は 5、6、7 番目の等高点の中から最も適した点を選択し、モデル D は 4 番目の等高点を使用しました。

6 番アーチを再現する際の最大の困難は、3 つの制御点（充満度制御点、上・下部形状制御点）をすべて通過する曲線を作成しなければならないという点です。もしこれらの点が滑らかな曲線上に乗っておらず、ばらばらに散らばっている場合、すべての点を通過する滑らかな再現曲線を作成することは不可能です。例えば、形状制御点の一つだけが特に突き出ているような場合です。このように基準点の位置が不揃いであると、すべての点を通過する滑らかなアーチは存在し得ません。仮にすべての点を通る曲線を無理に作成したとしても、それは私たちが望む滑らかなアーチではなく、歪んだ形状になるだけです。

特にモデル A、B、C は、先に確認したようにアーチの表面がでこぼこです。このような状態で、単純に 1 番目、2 番目、4 番目の等高点を各制御点として指定すると、再現自体がほぼ不可能です。したがって、元の曲線が不揃いな場合には、一部調整が必要です。

このとき、充満度制御点（2 番目の等高点）の位置は正確であると仮定します。その代わり、二つの形状制御点は、再現曲線が元と最もよく一致するように慎重に選択しなければなりません。上部形状制御点は、3～7 番目の等高点の中から最も自然な曲線を作成できる点を選びます。下部形状制御点は、まず 1 番目の等高点で試み、曲線生成が不可能な場合は高さを少しずつ調整して、曲線を作成できる最適な位置を見つけなければなりません。

図 39～42 は、再現された 6 番アーチと関連する点を共に示した図です。モデル A の表板上部を例に挙げてみましょう。（図 39）このアーチは、2 番目の等高点（充満度制御点）、1 番目の等高点（下部形状制御点）、6 番目の等高点（上部形状制御点）を基準に再現しました。図を見ると、再現された曲線に比べて 4 番目の等高点と 1 番目のアーチ地点が盛り上がっていることが分かります。目で見ても、二つの点の位置は不自然です。もし 6 番目の代わりに盛り上がっている 4 番目の等高点を上部形状制御点として使用していたら、再現曲線の上部が全体的に膨らみ、元との差がさらに大きくなっていたでしょう。

モデル B の裏板下部のアーチも良い例です。（図 40）最初は 2、1、7 番の等高点を各制御点として使用しましたが、曲線生成に失敗しました。1 番目の等高点の位置が高すぎたためです。そこで、下部形状制御点の高さを少しずつ下げながら反復計算した結果、0.4mm 下げて初めて曲線を作成することができました。図を見ると、再現曲線が 1 番目の等高点の下を通過していることが確認できます。同時に、3 番目と 4 番目の等高点は再現曲線よりはるか下にあります。これは、充満度制御点の位置が誤っているか、あるいは 3、4 番の等高点の位置が誤っている可能性があることを意味します。しかし、どちらが正しいかは現時点では分からないため、「充満度制御点は 2 番目の等高点とする」という原則に従って再現を進めました。

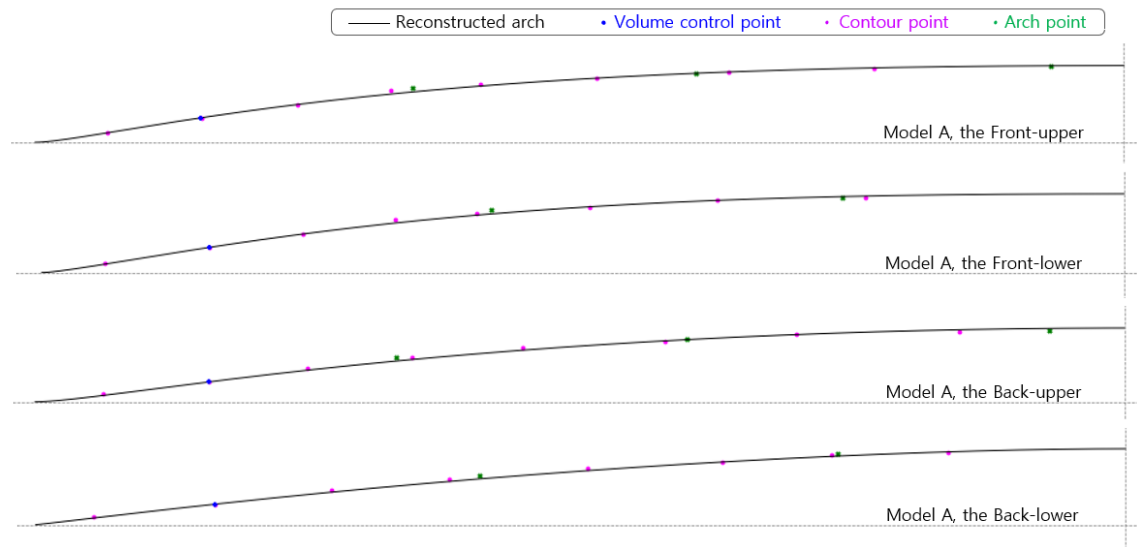


図 39: Model A, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

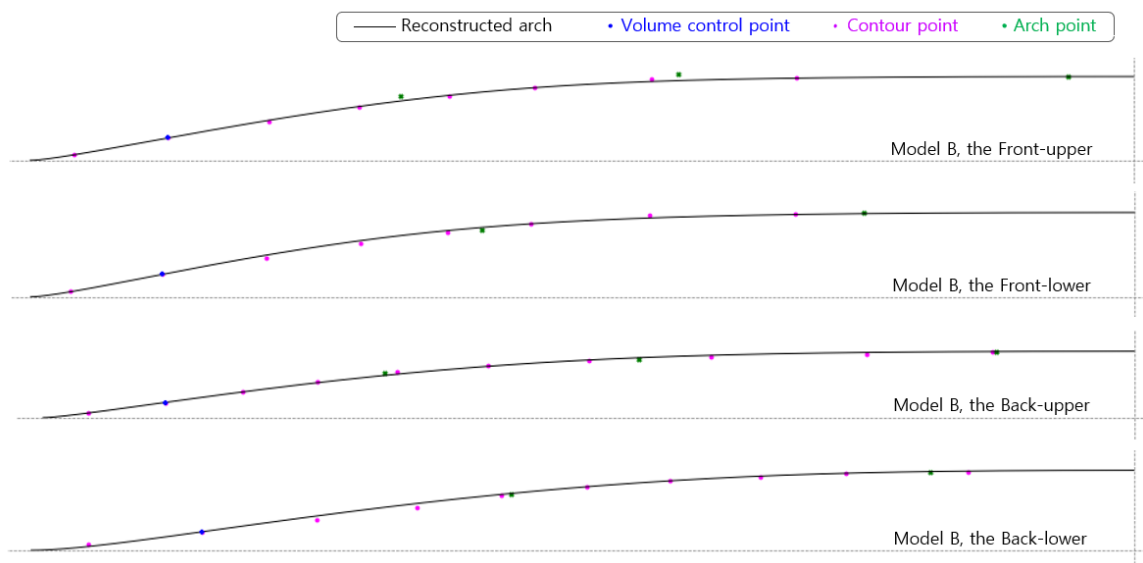


図 40: Model B, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

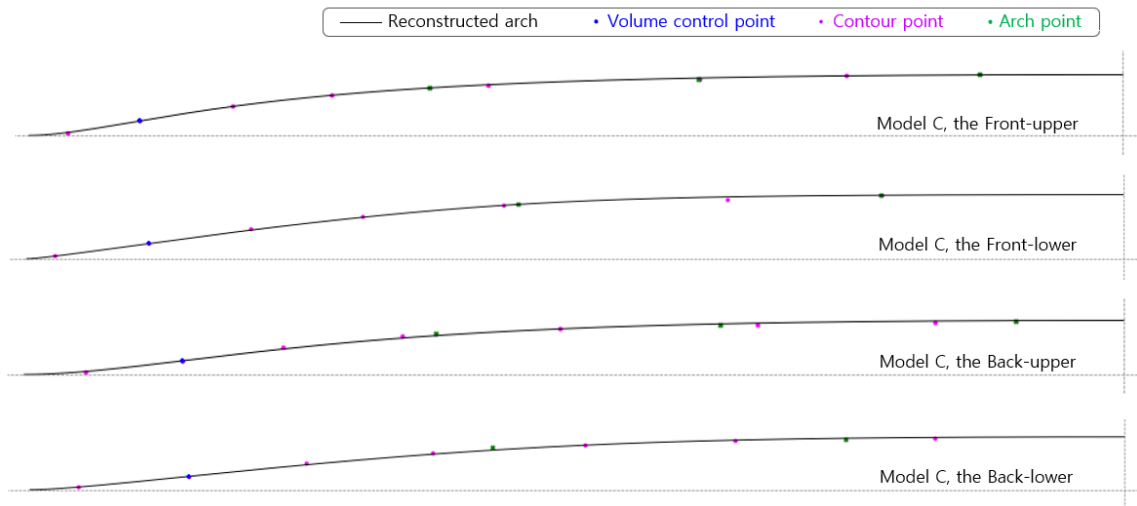


図 41: Model C, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

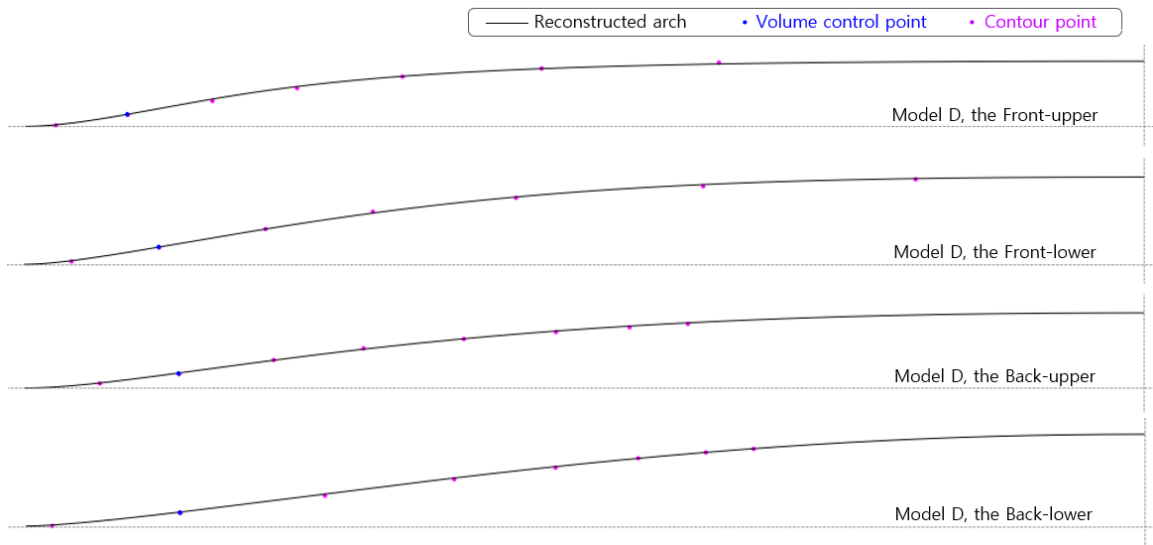


図 42: Model D, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

8.1. 再現結果

図 43～54 は、すべてのモデルアーチの最終的な再現結果です。

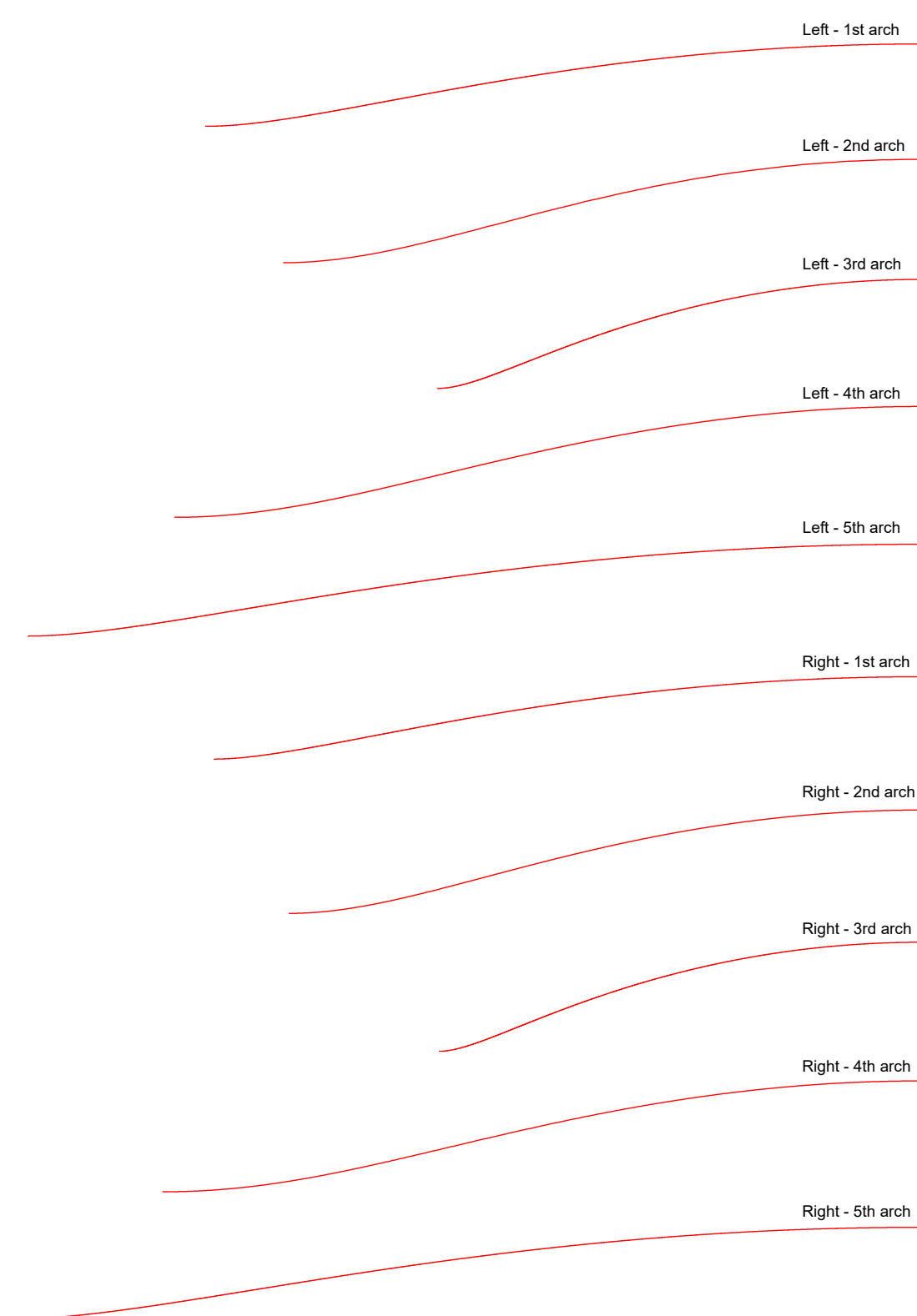


図 43: Model A, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



図 44: Model A, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)

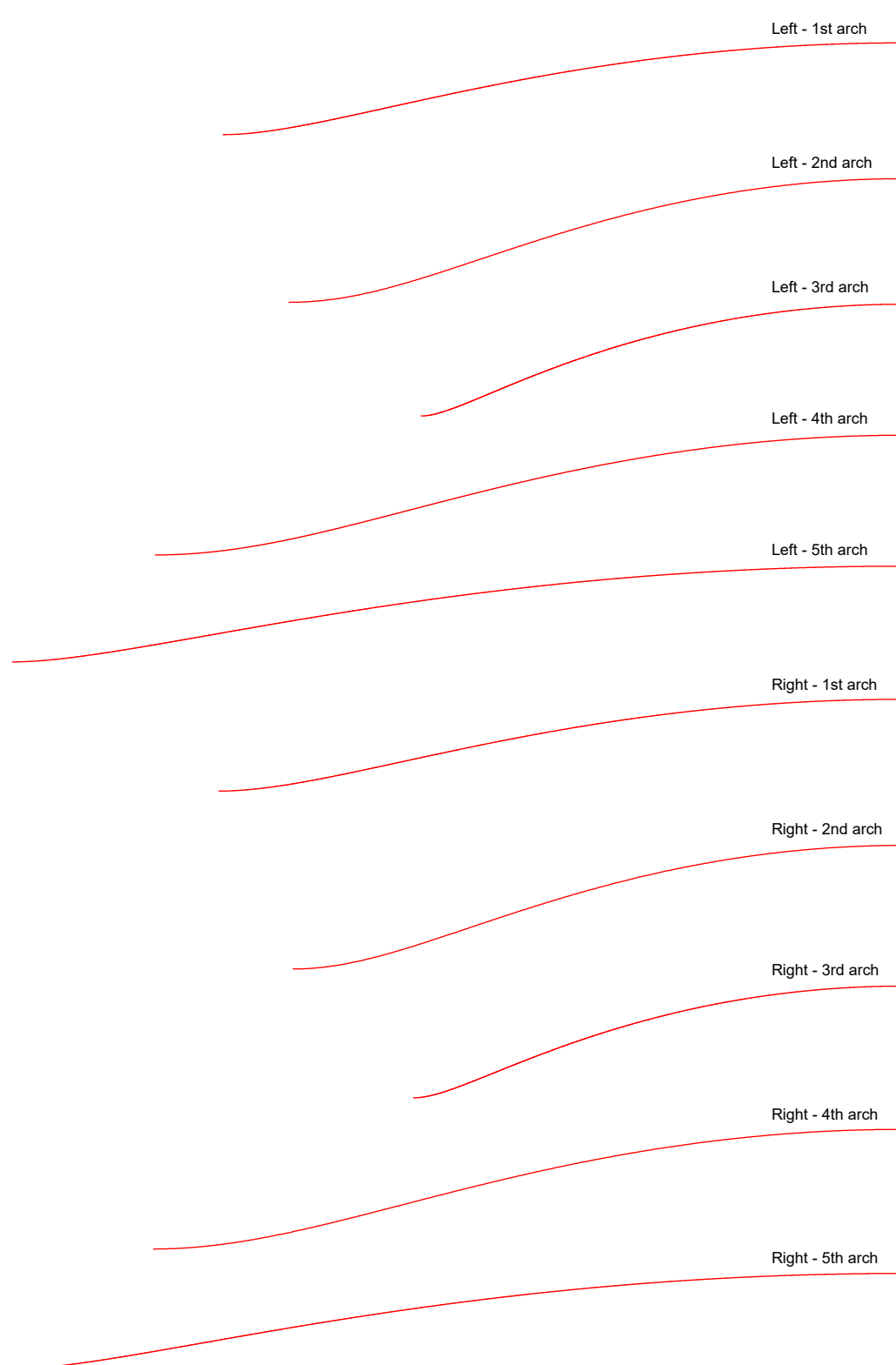


図 45: Model B, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)

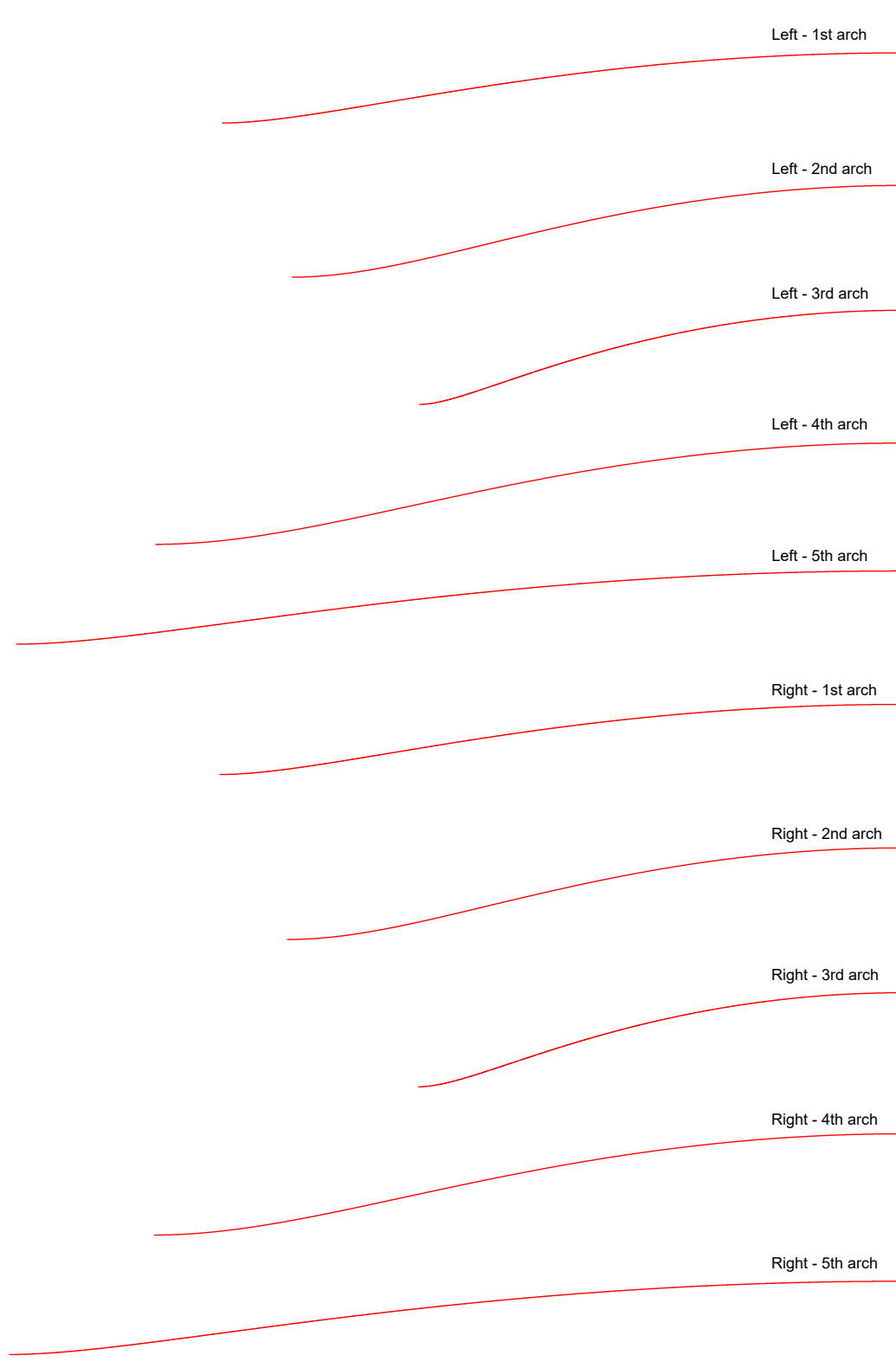


図 46: Model B, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



図 47: Model C, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



図 48: Model C, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)

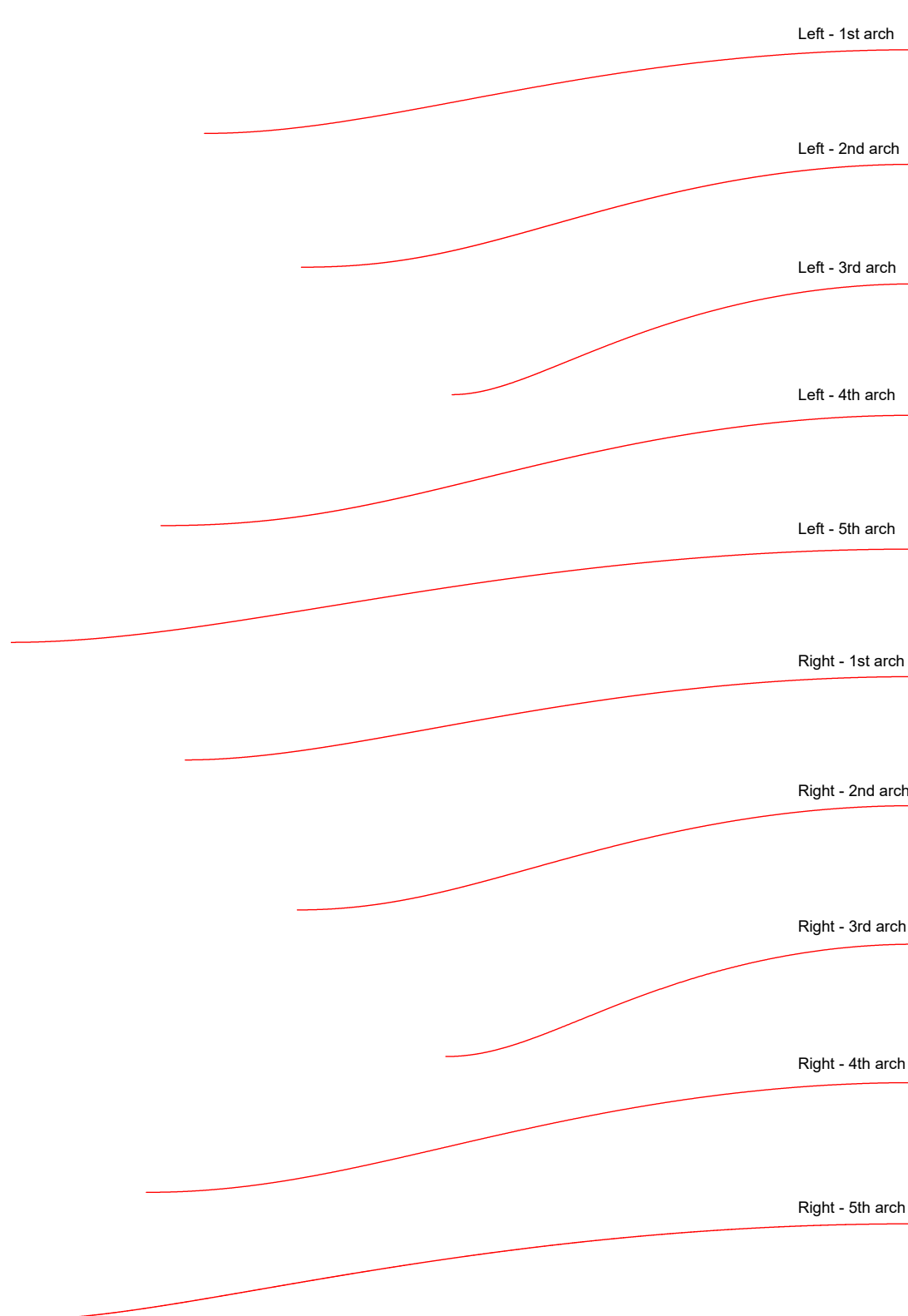


図 49: Model D, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



図 50: Model D, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)

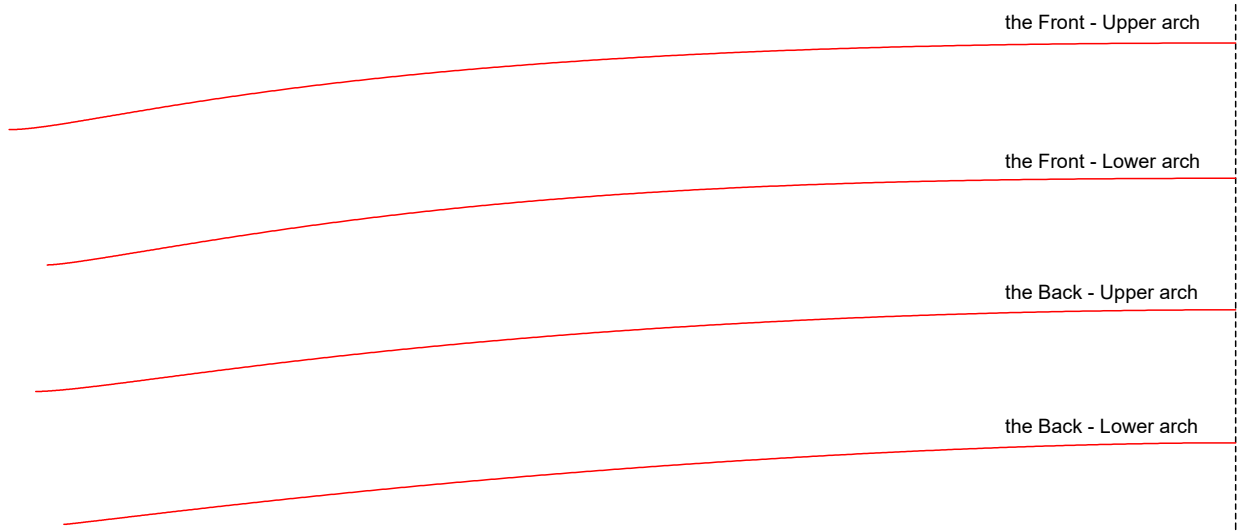


図 51: Model A, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)

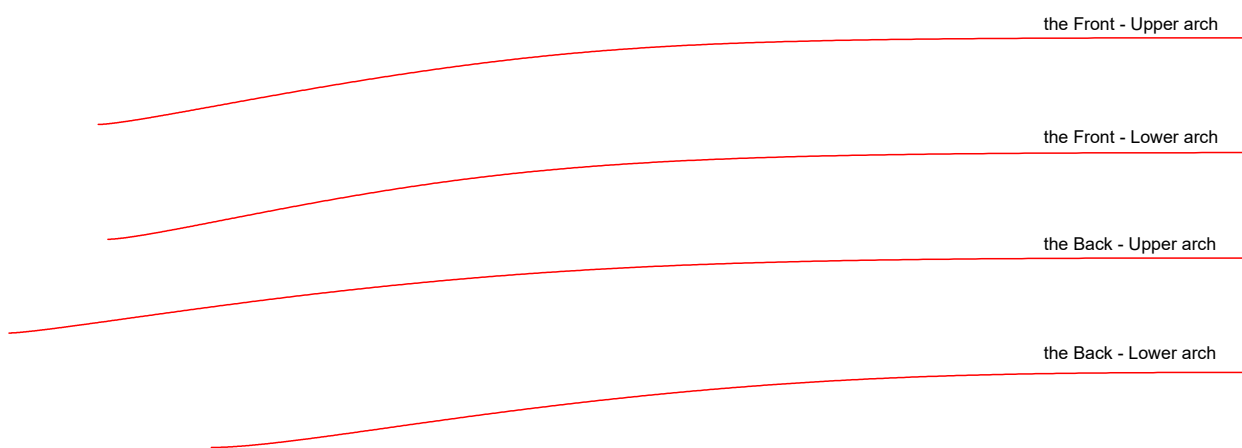


図 52: Model B, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)

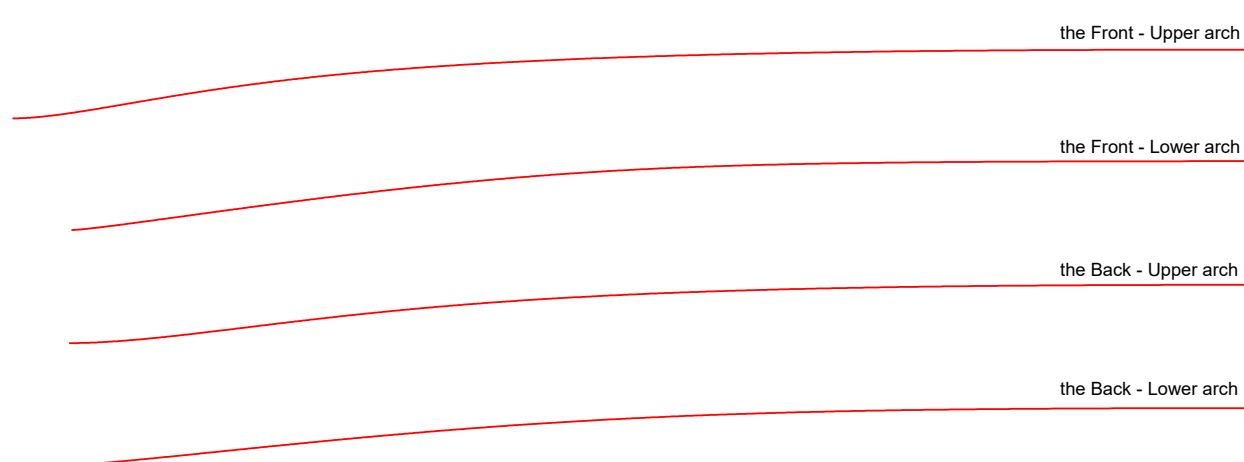


図 53: Model C, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)

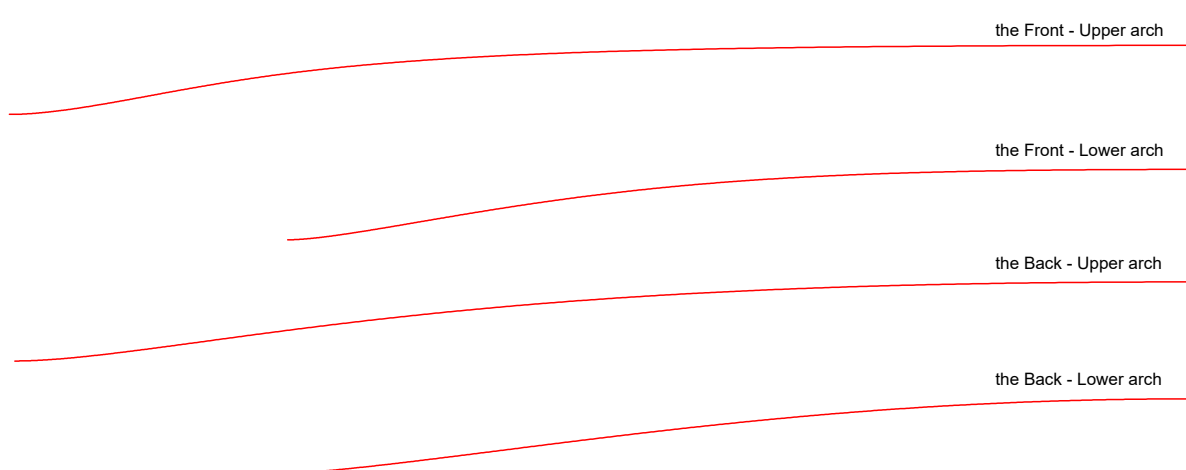


図 54: Model D, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)

8.2. 結果の分析

本章では、画像、パラメータ、充満度、誤差などのデータを基に、再現アーチを分析し、評価します。この分析を通じて、ストラディバリ・アーチの特徴をより詳しく把握し、再現方法の信頼性もまた確認できるでしょう。

8.2.1. 画像分析

以下の図 55～66 は、再現アーチとモデルアーチを重ねて表示したものです。これらの図を視覚的に比較し、モデル別、位置別（1 番、2 番アーチなど）の特徴を分析します。図において、赤い線は再現アーチを、黒い線はモデルアーチを示します。

二つのアーチを重ねて比較すると、モデルアーチのでこぼこや歪みが明確に現れるため、モデルの問題点を容易に把握できます。これは逆に、再現アーチの信頼性を判断しやすいという意味でもあります。おそらく、ほとんどの製作者はこの比較だけで、再現曲線を実際の楽器製作に使用できるかどうかを判断できるでしょう。

* モデル A ー表板 (図 55) : モデルの 1、5 番アーチは、1 番目の等高線付近が不自然に盛り上がっているのに対し、再現アーチは滑らかな曲線を示します。モデルの 2 番アーチは中央部が突き出ていますが、再現アーチは滑らかです。モデルの 3 番アーチは頂点から急激に低くなる問題がありますが、再現アーチは緩やかに下降します。4 番アーチは、モデルアーチの中央部がわずかに突き出ている点を除けば、二つの曲線は非常に類似しています。

* モデル A ー裏板 (図 56) : モデルの 1 番アーチは、表板と同様に 1 番目の等高線付近が不自然に盛り上がっています。3 番アーチもまた、表板と類似した傾向を示します。2、4、5 番アーチは、モデルアーチに少しずつ盛り上がった箇所が見られます。

* モデル B ー表板 (図 57) : 1 番アーチは二つの曲線が非常に似ています。2 番アーチは、モデルアーチの中央部が急激に窪んでいるのに対し、再現アーチは滑らかです。3 番アーチは、モデルの上部が突き出て下部が沈んでいます。4、5 番アーチは、モデルの中央部が広く沈み込んでいます。

* モデル B ー裏板 (図 58) : 5 番アーチは、モデルの中央部が不自然に大きく沈み込んでいます。再現アーチは、この部分を滑らかな曲線で復元します。3、4 番アーチは二つの曲線が非常に類似しています。

* モデル C ー表板 (図 59) : 楽器のサイズが大きいためか、モデル A、B に比べて凹凸が少ないです。1、2、4、5 番アーチは二つの曲線が非常に類似しており、3 番アーチはモデルアーチの中央部がわずかに高いです。

* モデル C ー裏板 (図 60) : すべてのアーチにおいて、モデルアーチの中央部が全体的にわずかに高いです。これは局部的な凹凸ではないため、注目に値します。充満度制御点を中央部に移動させれば解決しますが、再現の一貫性を保つために制御点の位置は変更しませんでした。これは、この楽器固有の特徴である可能性があります。

* モデル D ー表板 (図 61) : 他のモデルに比べて誤差が大きく見えますが、これはサウンドポストによるプレートの歪みが原因と推定されます。実際に、左側（ベースパー側）のアーチは上部がほとんど低い一方、右側（サウンドポスト側）のアーチは上部がほとんど高いです。製作当時の姿は、この二つの中間的な形状だったでしょう。もし左右のアーチの平均曲線を基準に再現すれば、誤差ははるかに減少するはずです。

* モデル D ー裏板 (図 62) : 裏板にもサウンドポストによる歪みが見られますが、1、2 番アーチは例外的に二つの曲

線がほぼ一致します。これは、裏板の該当部位が表板より硬く、構造的な影響を受けにくいためと考えられます。他のモデルにおいても、裏板の 1、2 番アーチは他の部位に比べてモデルと再現曲線がより類似する傾向を示します。

* 6 番アーチ (図 63～66)：モデル A、B、C は元の凹凸が多いですが、再現アーチはこれを滑らかに補正します。一方、CT スキャンで製作されたモデル D は、元と再現アーチが非常に類似しています。これは、元のデータが正確であれば、本再現方法が非常に高い精度を示すことを意味します。特にモデル A は、図 39 で見たように、モデルの 1、5 番アーチが特に上に盛り上がっていることが確認できます。

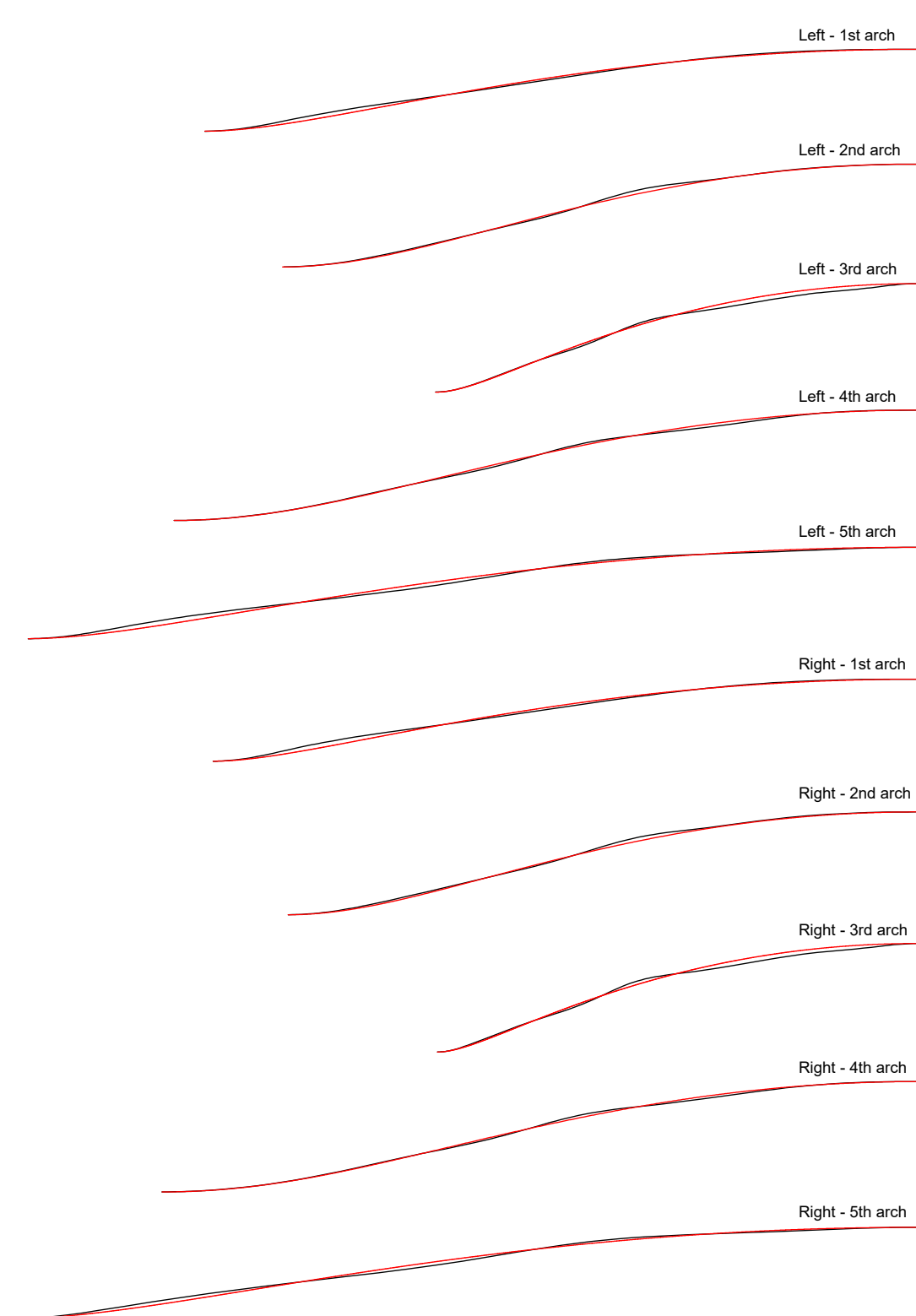


図 55: Model A, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

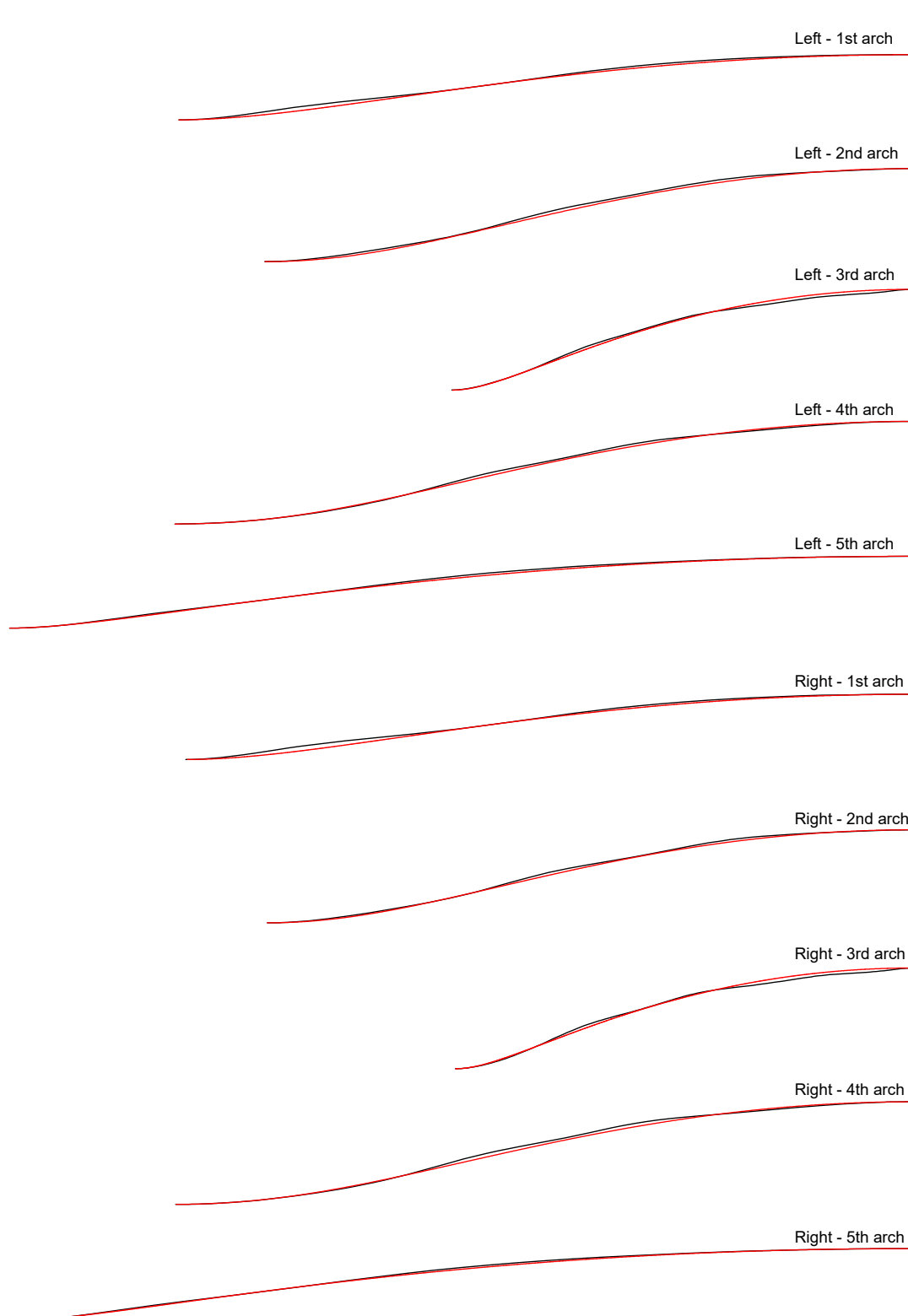


図 56: Model A, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

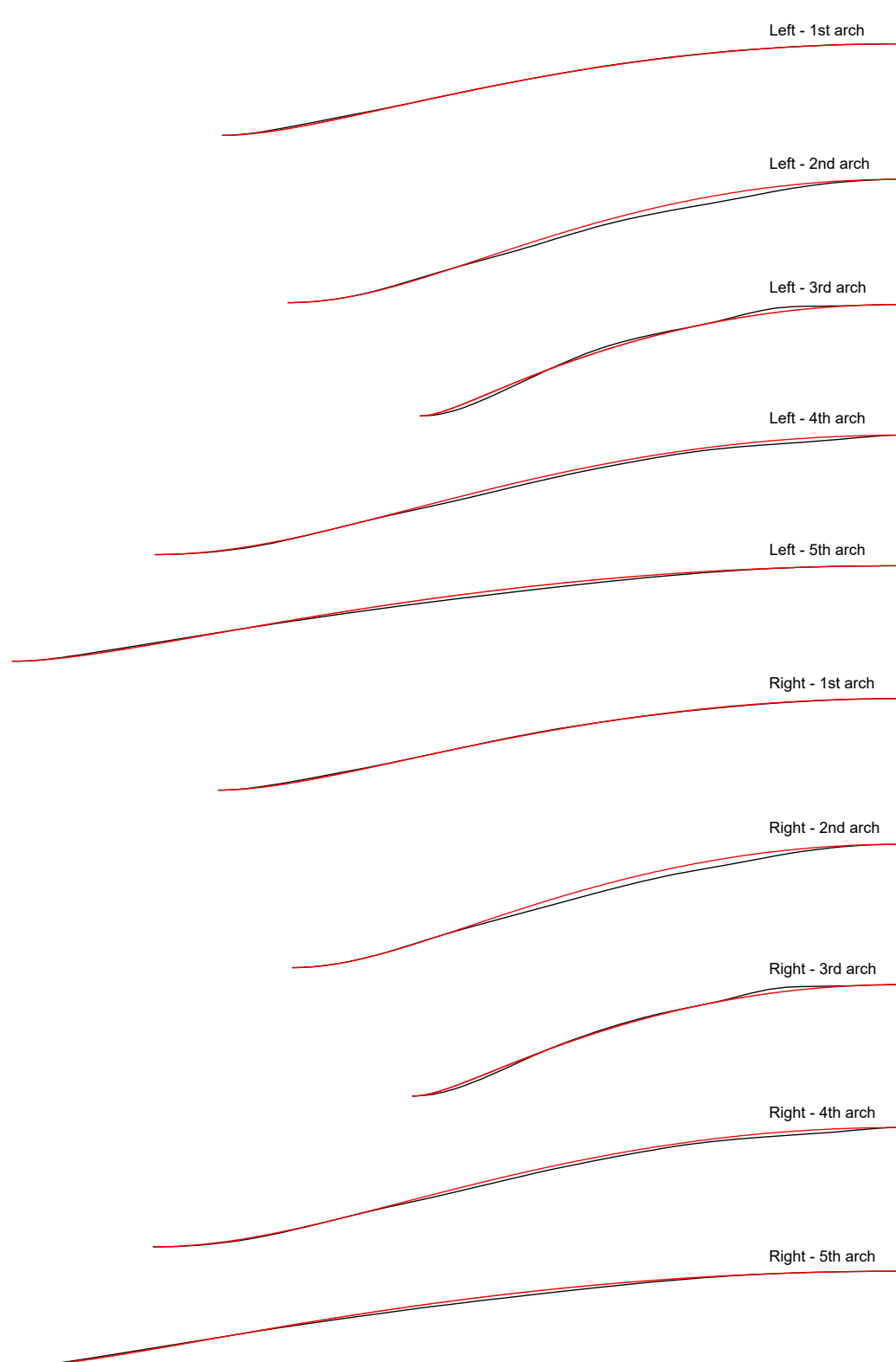


図 57: Model B, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

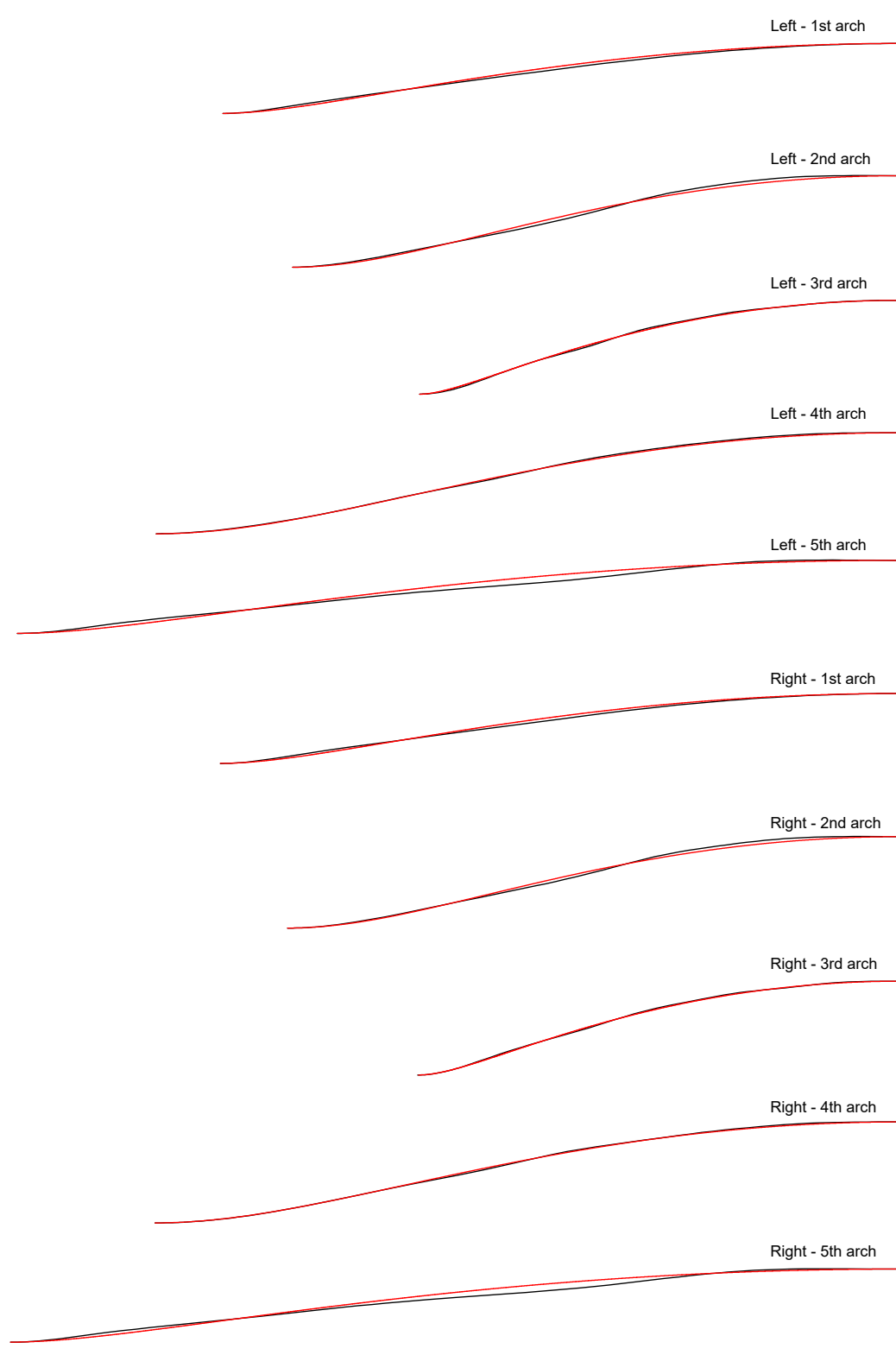


図 58: Model B, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

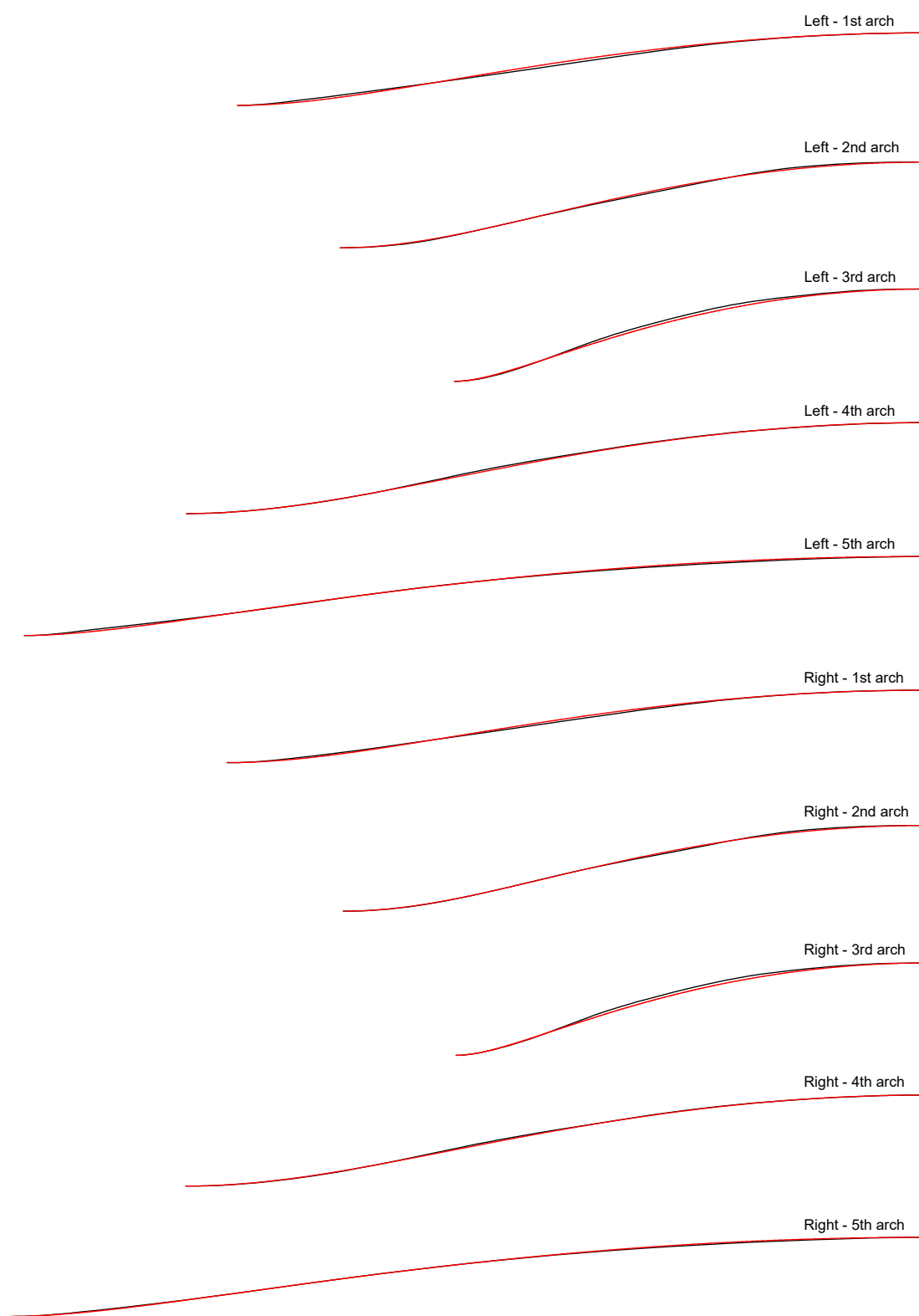


図 59: Model C, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

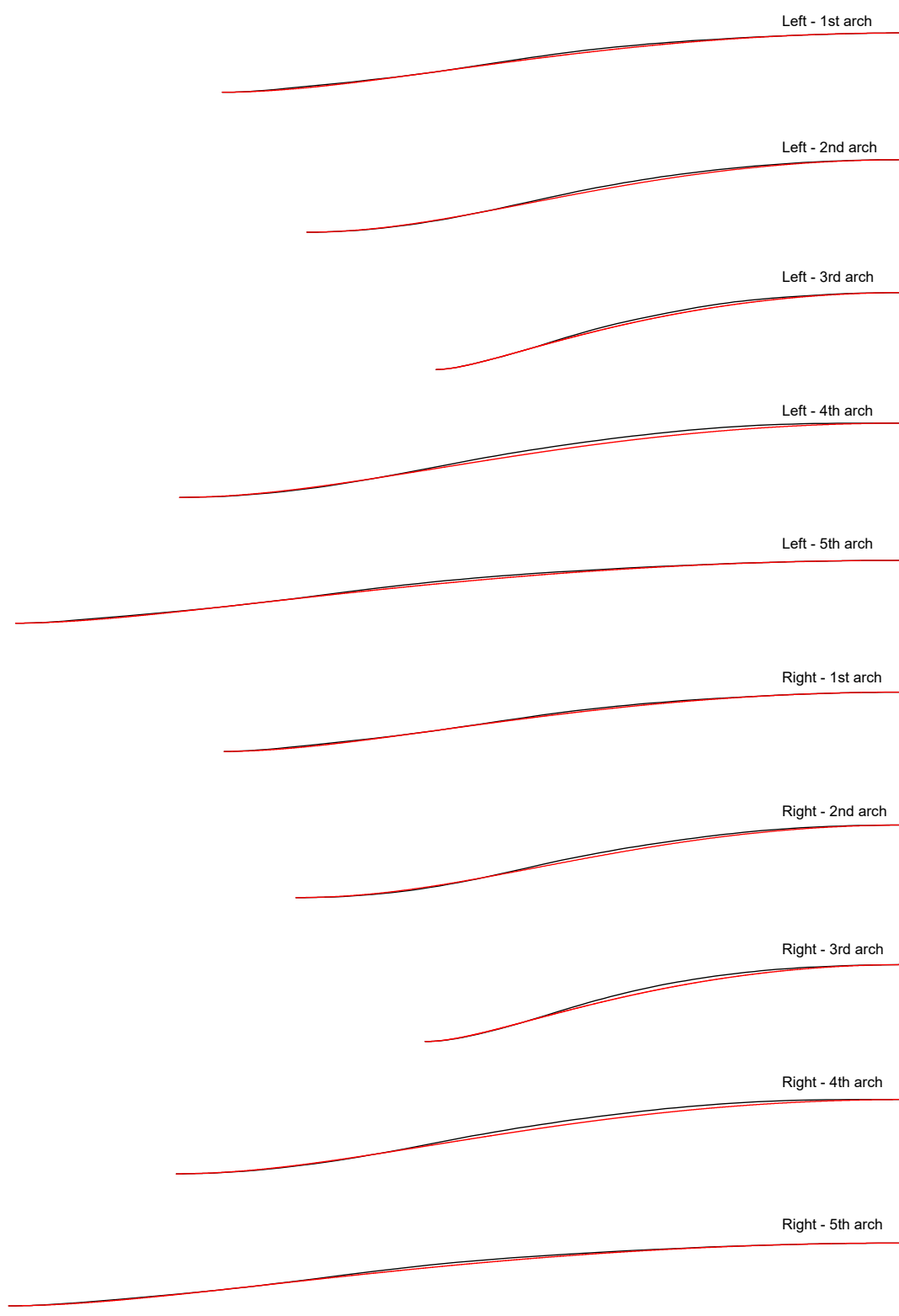


図 60: Model C, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

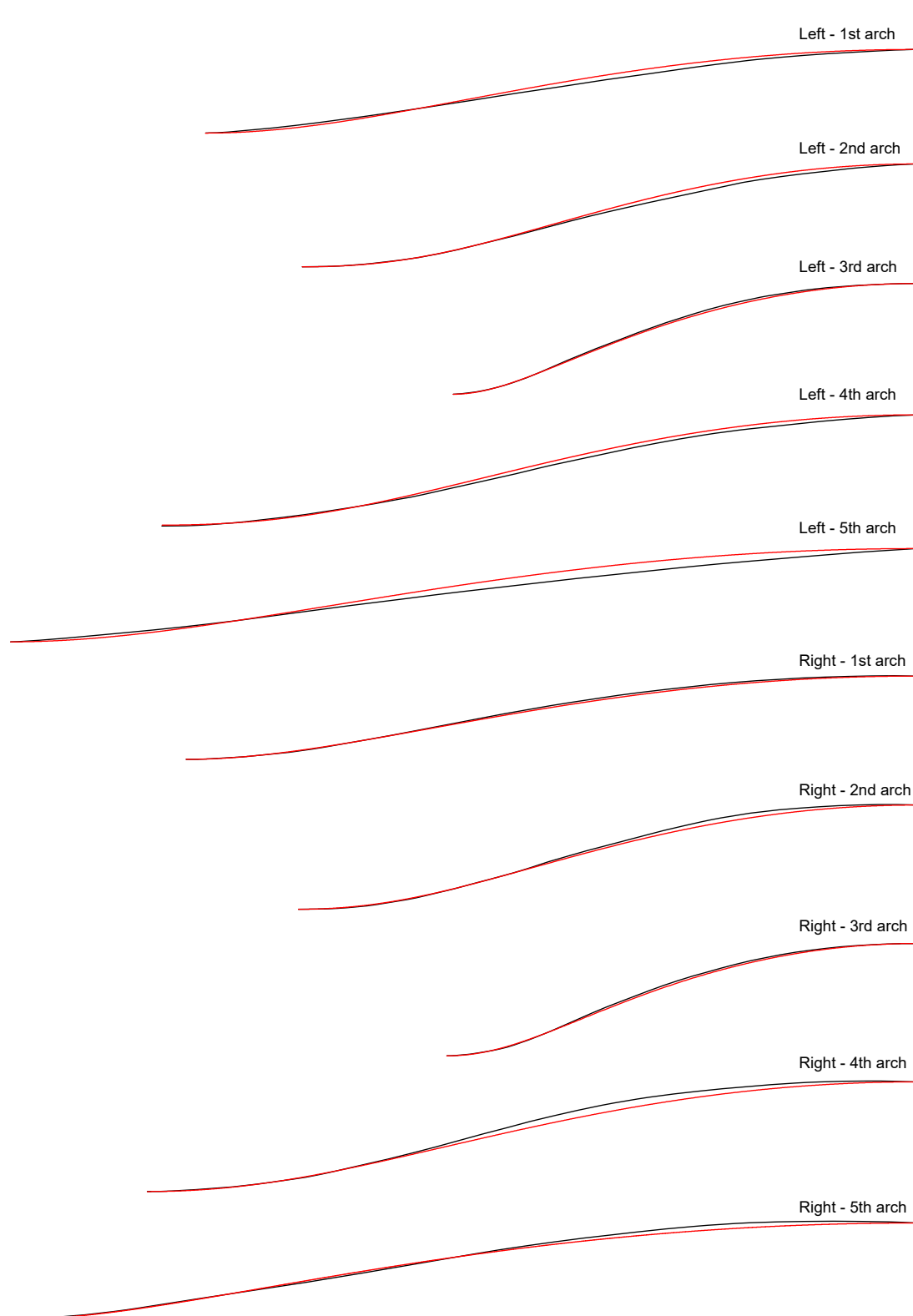


図 61: Model D, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

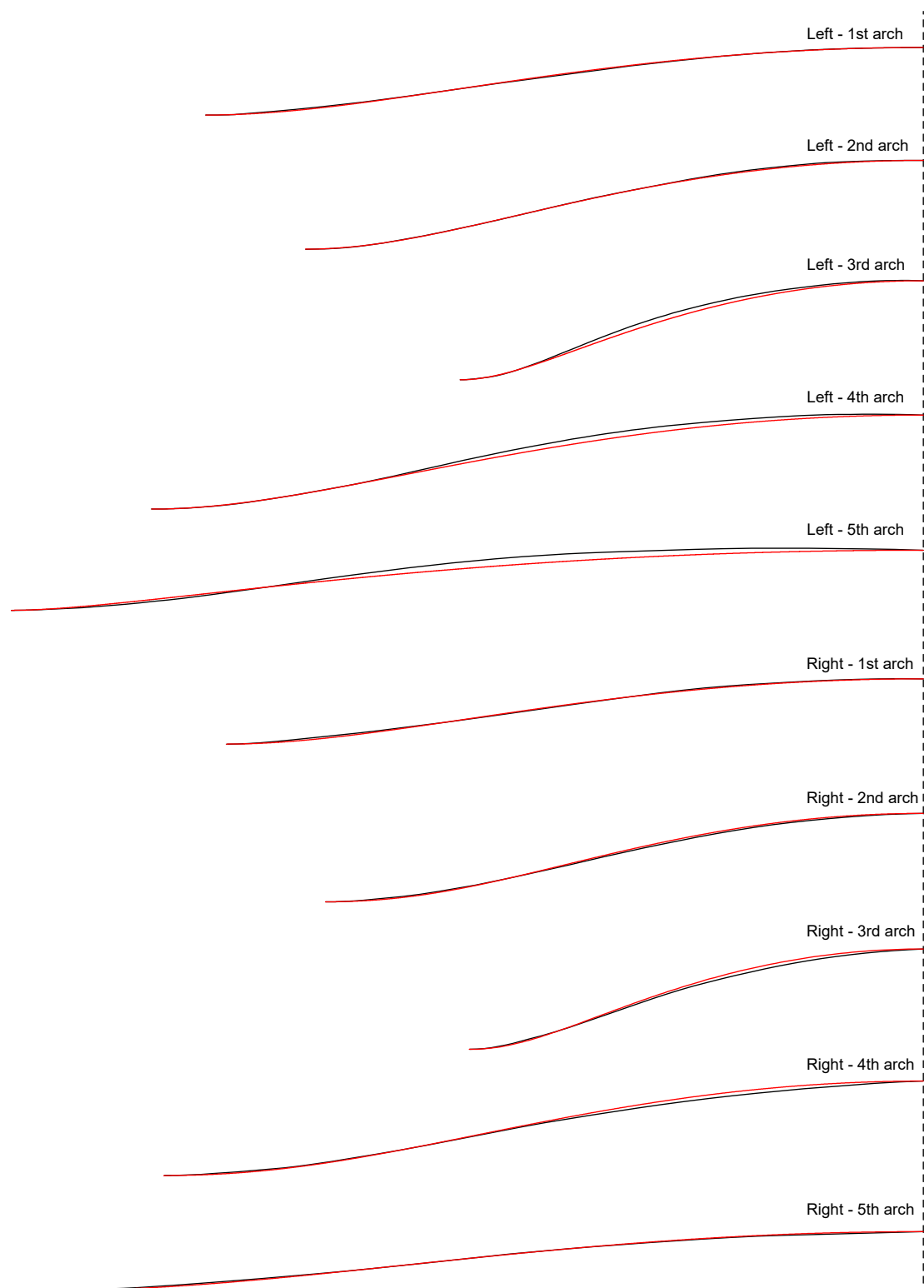


図 62: Model D, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Left/Right)

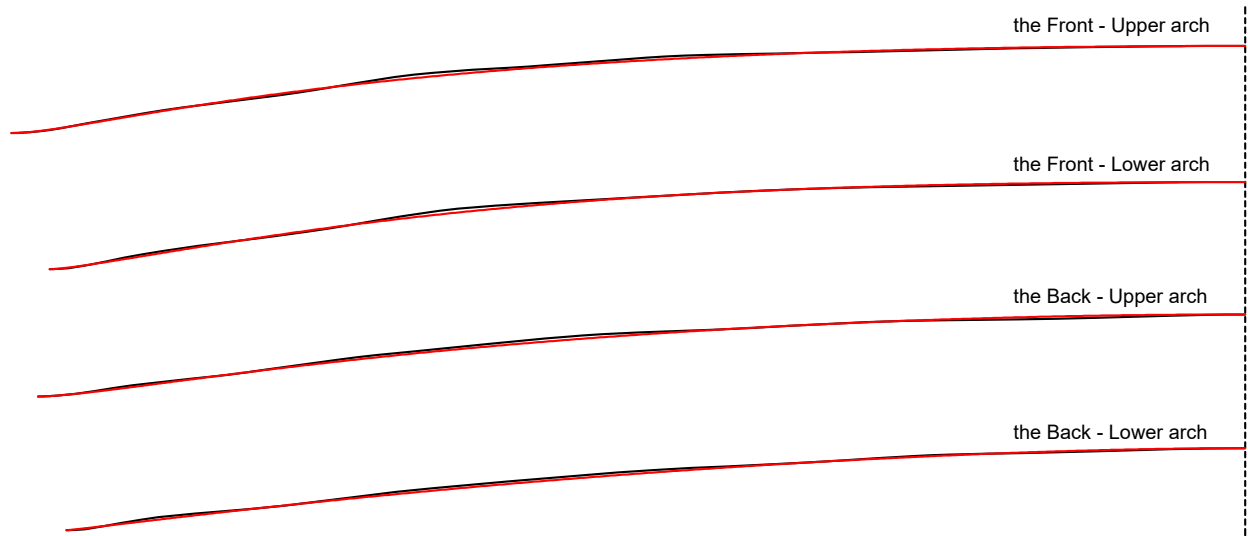


図 63: Model A, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

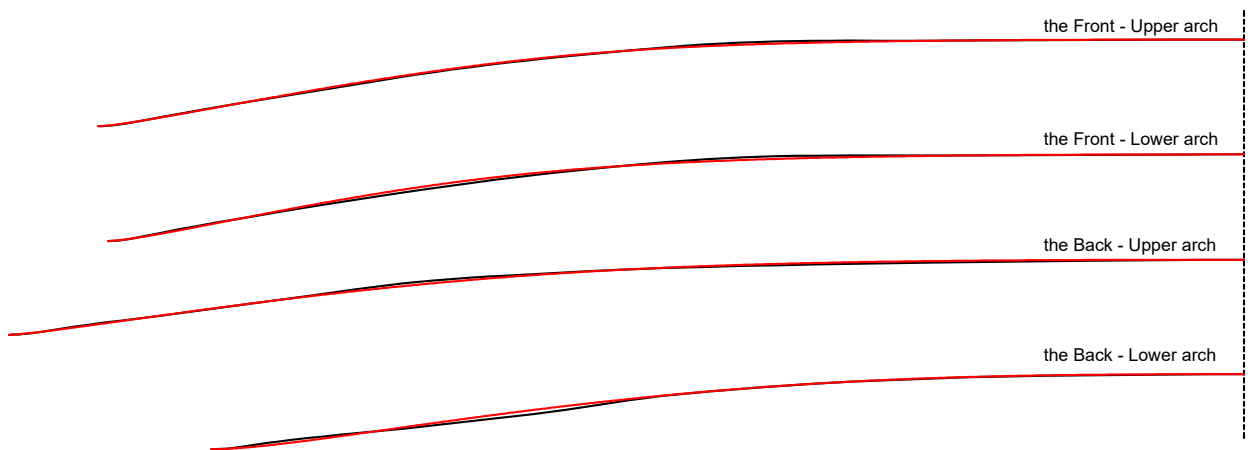


図 64: Model B, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

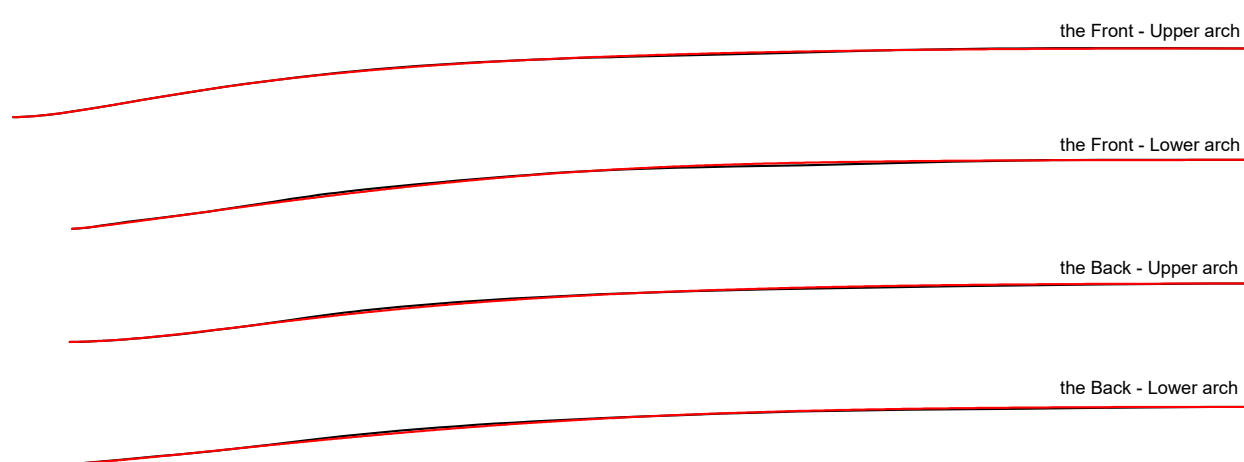


図 65: Model C, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

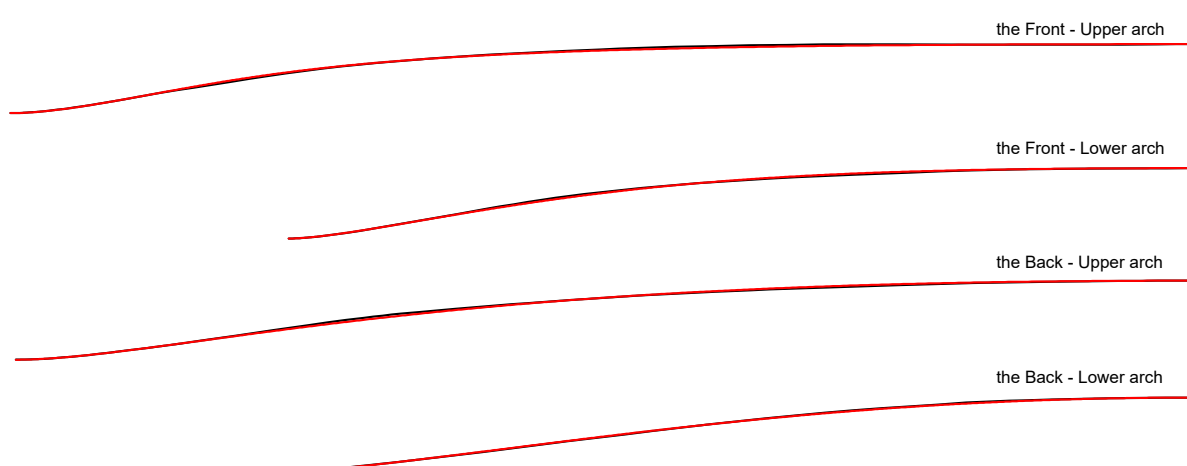


図 66: Model D, 6th arch: Comparison of reconstruction curve(red) and model curve(black), (Front/Back, Upper/Lower parts)

8.2.2. パラメータ分析

再現アーチのパラメータは、アーチの形状と性格を示す指標です。このパラメータを分析することで、ストラディバリ・アーチの特徴を把握でき、さらに形状別にアーチを分類し、体系化することも可能です。

表 5 は、6 番アーチのパラメータ値です。6 番アーチはすべて CTDAcec タイプであるため、Type 項目は省略しました。各パラメータの意味は以下の通りです。

expo は、3 次多項式曲線を左右に密集させる指数値です。値が「+」であれば左側（アーチの端部側）へ、「-」であれば右側（アーチの頂点側）へ密集します。表を見ると、ほとんどが「+」であるため、3 次多項式曲線が主に左側に密集していることが分かります。これは、アーチの端部に近づくほど傾斜が急になることを意味し、絶対値が大きいほどその度合いが強くなります。ただし、expo の効果は 3 次多項式曲線の振幅（bamp）に比例するため、振幅が「0」に近ければ、expo 値の影響も微々たるものになります。

bamp は、3 次多項式曲線の振幅と柄の方向を示します。記号「-」は柄が左側（アーチの端部側）にあることを意味し、記号がなければ右側にあることを意味します。数字自体は、常に負である振幅の大きさを示します。例えば、bamp = -7.313 は、柄が左側にあり、振幅が -7.313 であることを意味し、bamp = 25.272 は、柄が右側にあり、振幅が -25.272 であることを意味します。表を見ると、ほとんどに-記号が付いており、柄が主に左側に位置していることが分かります。

camp と pamp は、それぞれカテナリー曲線の振幅と、二つの曲線を足し合わせた最終的なパターン曲線の振幅を意味します。bamp とは異なり、記号は実際の値の符号を表します。例えば、camp = -31.683 は振幅が負（下に凸）であることを、camp = 2.123 は振幅が正（上に凸）であることを意味します。camp と pamp には「柄」の概念がないため、マイナス記号（-）は実際の振幅を意味し、これらの値はほとんどが負です（下に凸）。一般的に、これらの振幅値の絶対値は、楽器の大きさに比例する傾向があります。

d-diff と u-diff は、それぞれ下部および上部形状制御点との誤差を示します。最大で「±0.001」の値を持ち、表中の「0.000」は誤差が「0.0005」より小さいことを意味します。

許容誤差（tolerance）は、計算時間を短縮し、成功率を高めるために設定した値で、アーチの幅（アーチの一方の端点から頂点まで）と高さ、および充満度制御点 Z までの距離に関する誤差を意味します。近似曲線である CTDAce と CTDAice は非常に精密な計算が可能であるため、許容誤差を 1e-9 に設定しました。これは、誤差がほとんどないと考えて差し支えありません。

形状制御点（Shape control point）のうち、下部制御点は CP1（1 番目の等高点）を基準としますが、曲線生成が不可能な場合には y 座標を一部修正しました。上部制御点は CP4～7 の中から最も適した点を選択しました。表を見ると、かなりの数のアーチで下部形状制御点の座標が修正されていますが、これは元のモデルの 1 番目の等高点データが不正確である可能性を示唆しています。

1～5 番アーチは、ほとんどが CTDA より充満度が大きい CHTA タイプです。一部のアーチのみが CTDA より充満度が小さい CETA または CTDAice タイプで再現されました。R 値が存在しない近似曲線は、nCHTAce や nCETAice のようにパターン曲線の振幅（camp）と指数値（expo）のパラメータを持ちます。

表 6 と 7 は、1～5 番アーチのパラメータをまとめたものです。ここで注目すべき点は、CTDA より充満度が小さい

Model	Plate	Side	expo	bamp	camp	pamp	d-diff	u-diff	tolerance	Shape control point
A	Front	Upper	-0.613	-7.313	-31.683	-38.720	0.001	0.000	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.400	-5.450	-34.108	-37.083	0.000	0.000	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
	Back	Upper	0.613	14.781	-14.435	-28.922	0.001	0.001	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
		Lower	0.114	25.272	-0.095	-25.358	0.001	0.001	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
B	Front	Upper	2.259	-28.288	-40.044	-55.495	-0.001	-0.001	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.725	-26.375	-39.475	-56.240	0.000	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP6
	Back	Upper	2.113	-20.238	-44.137	-53.806	-0.001	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP7
		Lower	2.881	-8.822	-28.292	-30.537	-0.001	0.000	0.001	CP1 (y:-0.4), CP7
C	Front	Upper	0.472	-53.484	-68.319	-114.736	0.000	-0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	2.395	-47.717	-75.858	-99.146	-0.001	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP5
	Back	Upper	0.556	-39.756	-55.440	-89.199	-0.001	0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	1.875	-27.800	-67.709	-82.027	-0.001	0.000	0.001	CP1 (y:-0.1), CP5
D	Front	Upper	0.750	-33.550	-33.083	-61.701	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	1.300	-9.850	-25.149	-31.493	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
	Back	Upper	0.038	-5.913	-29.014	-34.157	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	-0.888	6.745	-9.072	-14.478	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4

表 5: Detailed parameters by model for the 6th arch. Type:CTDAcec, expo:Exponent of distorted cubic polynomial curve (+:left, -:right), bamp:Cubic polynomial curve amplitude and handle direction, camp:Catenary curve amplitude, pamp:Final pattern curve amplitude, d-diff/u-diff>Error with bottom/top shape control point, tolerance:Calculation tolerance for distance to shape and fullness control points, Shape control point:Information on top/bottom shape control points.

CETA と CTDAice タイプ (*印) が、ほとんど 2、4 番アーチに集中しているという事実です。2、4 番アーチの中で CHTA タイプである場合を見ても、他のアーチに比べて R 値が際立って大きいです。 R 値が大きいということは、曲線が CTDA に近い、すなわち充満度が CTDA よりほんの少し大きいだけだという意味です。結論として、パラメータは「2、4 番アーチが他のアーチに比べて充満度が小さい」という傾向を明確に示しています。

一方、トロコイドの限界を超えた近似曲線 (nCHTAce) は、5 番アーチに集中しています。nCHTAce ではない CHTA タイプの 5 番アーチもまた、他のアーチに比べて R 値が小さい傾向を示します。これは、「5 番アーチが他のアーチに比べて充満度が大きい」ことを意味します。

これまでの分析を「2、4 番アーチは充満度が小さく、5 番アーチは大きい」とまとめることができます。しかし、ここには一つの問題点があります。幅と高さが互いに異なるアーチの充満度を直接比較することは、理にかなっていないためです。次の節では、この問題を解決し、幅と高さが異なるアーチの充満度を客観的に比較する方法を説明します。

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
A	Front	BB(L)	1	CHTA	176.447	30.845	15.192	-	-	0.010
			2	CHTA	10688.846	21.496	5.560	-	-	0.010
			3	CHTA	159.219	18.082	10.368	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	25.086	5.850	0.155	-2.034	1E-09
			5	CHTA	184.145	39.783	21.924	-	-	0.010
		SP(R)	1	CHTA	138.488	30.733	18.188	-	-	0.010
			2	CHTA	886.691	22.525	6.785	-	-	0.010
			3	CHTA	129.913	18.195	11.458	-	-	0.010
			4	*CETA	1939.080	24.277	5.065	-	-	0.010
			5	CHTA	217.751	40.452	19.656	-	-	0.010
	Back	SP(L)	1	CHTA	215.423	32.714	12.978	-	-	0.010
			2	*CETA	3644.551	21.072	4.548	-	-	0.010
			3	CHTA	178.081	16.934	8.878	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	24.513	5.350	1.326	-2.667	1E-09
			5	nCHTAce	167.144	42.118	24.265	-2.663	-0.811	0.010
		BB(R)	1	CHTA	202.089	32.382	13.420	-	-	0.010
			2	*CTDAice	-	21.451	4.850	0.015	-2.270	1E-09
			3	CHTA	160.507	16.909	9.252	-	-	0.010
			4	*CETA	1511.957	22.912	4.433	-	-	0.010
			5	nCHTAce	166.468	41.972	24.214	-3.600	-0.817	0.010
B	Front	BB(L)	1	CHTA	212.206	33.539	16.695	-	-	0.012
			2	*CETA	3239.278	24.081	7.296	-	-	0.012
			3	CHTA	136.848	21.652	14.691	-	-	0.012
			4	CTDAce	-	29.835	7.500	-0.198	-1.083	1E-09
			5	CHTA	189.793	46.840	29.330	-	-	0.012
		SP(R)	1	CHTA	267.250	33.225	14.322	-	-	0.012
			2	CHTA	2051.964	24.931	8.476	-	-	0.012
			3	CHTA	161.254	21.893	13.667	-	-	0.012
			4	CHTA	3322.583	30.652	8.176	-	-	0.012
			5	CHTA	185.660	47.028	30.081	-	-	0.012
	Back	SP(L)	1	CHTA	161.819	36.062	20.395	-	-	0.012
			2	CHTA	820.860	26.379	7.691	-	-	0.012
			3	CHTA	128.945	22.464	14.458	-	-	0.012
			4	CHTA	1431.019	31.890	7.995	-	-	0.012
			5	nCHTAce	192.764	49.308	29.156	-0.139	-0.889	0.012
		BB(R)	1	CHTA	167.752	36.198	19.911	-	-	0.012
			2	CHTA	991.802	26.340	7.360	-	-	0.012
			3	CHTA	151.718	22.338	13.093	-	-	0.012
			4	CHTA	1060.475	32.554	8.616	-	-	0.012
			5	nCHTAce	196.804	49.781	29.058	-0.849	-0.959	0.012

表 6: Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5 (1/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, *:Curve with less fullness than a CTDA.

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
C	Front	SP(L)	1	CHTA	627.959	62.470	20.796	-	-	0.020
			2	CHTA	4318.054	43.962	10.818	-	-	0.020
			3	CHTA	316.263	39.224	21.179	-	-	0.020
			4	CHTA	2945.004	57.413	12.935	-	-	0.020
			5	nCHTAce	353.728	90.060	54.001	-0.796	-1.031	0.020
		BB(R)	1	CHTA	841.556	61.674	17.558	-	-	0.020
			2	CHTA	5781.621	43.373	10.536	-	-	0.020
			3	CHTA	314.605	39.085	21.169	-	-	0.020
			4	CHTA	3217.281	57.201	12.712	-	-	0.020
			5	CHTA	383.803	91.717	51.661	-	-	0.020
	Back	BB(L)	1	CHTA	643.186	64.150	19.267	-	-	0.020
			2	CHTA	4887.919	44.934	9.231	-	-	0.020
			3	CHTA	204.809	41.106	26.342	-	-	0.020
			4	CHTA	1442.634	60.568	13.923	-	-	0.020
			5	nCHTAce	380.492	93.017	50.206	-0.186	-0.877	0.020
		SP(R)	1	CHTA	516.159	65.516	22.815	-	-	0.020
			2	*CETA	5764.898	42.643	7.444	-	-	0.020
			3	CHTA	265.716	41.726	22.650	-	-	0.020
			4	CHTA	1375.980	61.202	14.278	-	-	0.020
			5	CHTA	428.348	93.818	45.638	-	-	0.020
D	Front	BB(L)	1	CHTA	1661.465	25.504	5.362	-	-	0.010
			2	*CETA	487.376	17.645	3.628	-	-	0.010
			3	CHTA	813.161	16.167	6.660	-	-	0.010
			4	*nCETAice	687.004	21.594	3.899	0.037	-1.901	0.010
			5	CHTA	886.179	35.128	7.975	-	-	0.010
		SP(R)	1	CHTA	601.170	28.397	7.329	-	-	0.010
			2	*CETA	738.275	19.014	4.213	-	-	0.010
			3	*CETA	1018.819	15.473	5.377	-	-	0.010
			4	*CETA	1527.610	24.364	4.809	-	-	0.010
			5	CHTA	216.966	39.200	19.164	-	-	0.010
	Back	SP(L)	1	CHTA	598.251	28.653	6.487	-	-	0.010
			2	CHTA	1499.270	21.831	5.474	-	-	0.010
			3	CHTA	414.510	16.643	6.825	-	-	0.010
			4	CHTA	635.787	29.673	8.026	-	-	0.010
			5	nCHTAce	186.319	45.242	23.778	-3.622	-0.963	0.010
		BB(R)	1	CHTA	456.513	28.642	7.165	-	-	0.010
			2	*CETA	767.208	18.183	3.521	-	-	0.010
			3	CHTA	7156.057	15.358	5.418	-	-	0.010
			4	*CETA	1446.391	23.617	3.987	-	-	0.010
			5	CHTA	2840.146	32.331	3.988	-	-	0.010

表 7: Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5 (2/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, *:Curve with less fullness than a CTDA.

8.2.3. 充満度の分析

一般的にアーチのボリュームという用語が使われますが、これは2次元の断面である個々のアーチには、厳密に言えば適切な表現ではありません。ボリュームは3次元の体積を意味しますが、2次元であるアーチの断面には体積がないためです。もちろん、「ヴァイオリンの表板のボリュームが裏板より大きい」という表現は可能です。この場合、3次元である表板全体の体積を意味するためです。しかし、本報告書では2次元平面における「アーチが膨らんだ程度」を扱うため、「ボリューム」という用語は適切ではありません。

したがって、2次元平面でアーチが膨らんだ程度を示す適切な用語と客観的な指標が必要です。特に、幅と高さが異なるアーチを互いに比較するためには、共通の基準がなければなりません。現在、弦楽器アーチの2次元形状を示す公式な用語や指標がないため、本報告書でこれを新たに定義して使用します。

2次元アーチが膨らんだ程度を示す用語として「充満度 (Fullness)」^{*7}を使用します。この用語は、船舶工学など他の分野で、船体の太さの度合いや、特定の断面が基準形状をどれだけ満たしているかを示す際に、すでに使用されている概念です。したがって、2次元アーチの形状を表現するのに最も適していると判断しました。

この充満度を数値化するための指標として、「絶対充満度指数 (Absolute Fullness Index, AFI)」と「相対充満度指数 (Relative Fullness Index, RFI)」を導入しました。まず、二つの指数を定義した後、これらを用いてアーチを分析します。

充満度は面積と比例する概念であるため、まずアーチの面積を定義します。(※以降、すべての「アーチの面積と幅」は、左右対称を考慮し、「アーチの半分の面積と幅」を意味します。)

定義 8.1. アーチの面積 (Area of the arch)

アーチ曲線と、アーチの端点を通る水平線および頂点を通る垂直線で囲まれた閉じた図形の面積

図 67.(a) の灰色の部分がこれに該当します。

これを基に、「絶対充満度指数」を次のように定義します。

定義 8.2. 絶対充満度指数 (AFI, Absolute Fullness Index, 単位:[%])

アーチを囲む最小面積の長方形(幅:アーチの幅、高さ:アーチの高さ)に対するアーチの面積の比率。百分率(%)で表記。略して「絶対充満度 (Absolute Fullness)」とも表記

上記の定義に従い、AFI は次の式で計算します。

$$AFI[\%] = \frac{\text{アーチの面積}}{\text{アーチの幅} \times \text{アーチの高さ}} \times 100$$

^{*7} 膨らみの程度を指す用語として、曲率 (Curvature)、凸性 (Convexity)、膨張度 (Bulginess) など、いくつかの候補がありましたが、言葉の使い方やニュアンス、物理学用語としての適合性などを総合的に考慮し、「充満度 (Fullness)」という用語を最終的に選定しました。

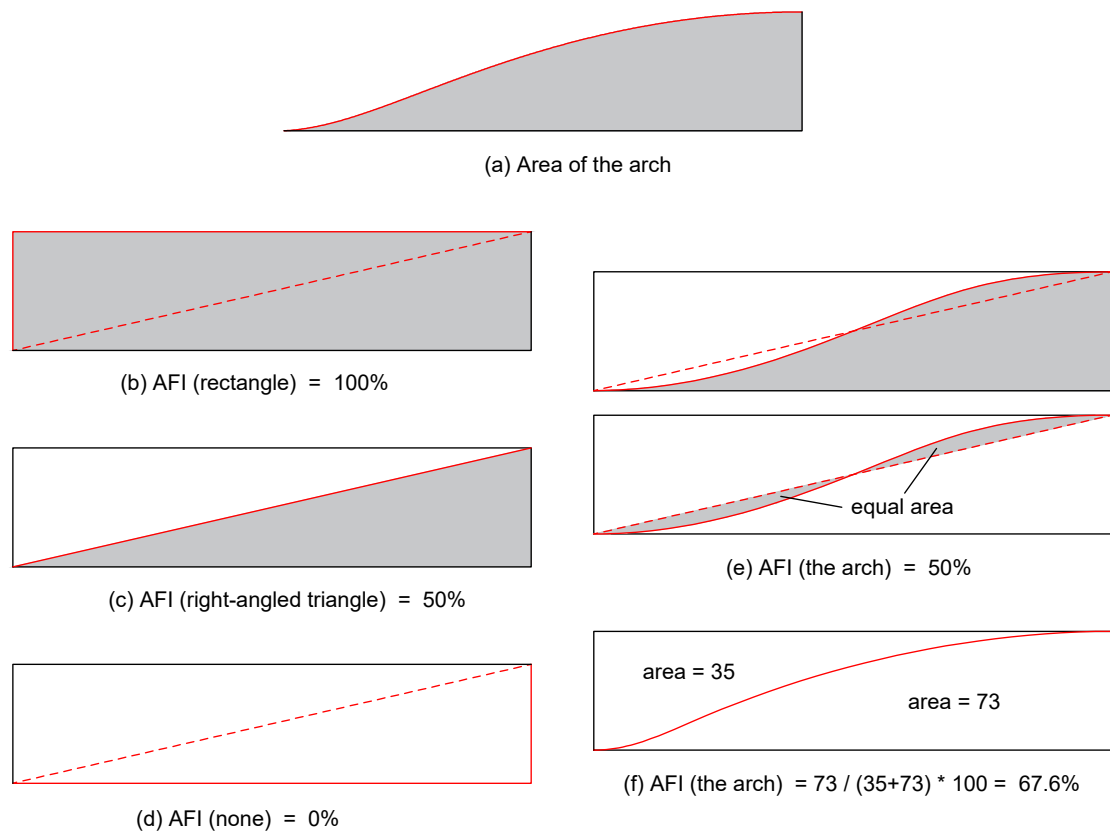


図 67: Arch area and Absolute Fullness Index (AFI)

このように、特定の図形の面積を、それを囲む最小面積の長方形で割る方法は、その図形の形状を分析し、正規化する場合によく用いられます。

この定義によれば、幅と高さが同じ二つのアーチ A (AFI= 85%) と B (AFI= 77%) がある場合、「アーチ A はアーチ B より AFI が約 8% 充満度が高い」と表現できます。

(参考：アーチが左右対称であれば、アーチ全体を基準に計算した AFI の値は、アーチの半分を基準に計算した値と常に同じです。)

図 67.(b) は AFI 100% で、アーチの曲線（赤色の実線）が膨らんで長方形に無限に近づいた時の姿と考えることができます。(c) は AFI 50% で、アーチの曲線が直線に伸びた時の姿と同じです。しかし、実際のアーチは直線ではないため、アーチの端点と頂点を結ぶ直線とアーチの曲線との面積が、直線の上と下で同一である場合 (e)、そのアーチの面積は直角三角形の面積と等しくなるため、AFI は 50% になります。AFI 0% は、(d) のようにアーチの面積が全く存在しない場合です。

上記の定義に従い、図 67.(f) のようにアーチの面積が 73 で、長方形の面積が 108(=35+73) であるアーチの AFI は、次の式で計算できます。

$$\begin{aligned} \text{AFI} &= \frac{\text{アーチの面積}}{\text{長方形の面積}} \times 100 \\ &= \frac{73}{35 + 73} \times 100 \\ &\approx 67.6\% \end{aligned}$$

次に「相対充満度指数」を次のように定義します。

定義 8.3. 相対充満度指数 (RFI, Relative Fullness Index, 単位:[%])

同じ幅と高さを持つ maxCHTA、CTDA、minCETA がある場合、アーチの面積が maxCHTA の面積と等しい時に「+100%」、CTDA の面積と等しい時に「0%」、minCETA の面積と等しい時に「-100%」と定め、この尺度に従ってアーチの面積を換算した百分率の値。略して「相対充満度 (Relative Fullness)」とも表記。

すなわち、AFI はアーチを囲む長方形を基準としますが、RFI はトロコイドで作成可能な最大 (maxCHTA)、基準 (CTDA)、最小 (minCETA) の充満度を持つアーチを尺度とします。

RFI を導入した理由は、以下のような情報を容易に把握するためです。

- 当該アーチの充満度がトロコイドの範囲内でどの程度の水準にあるか
- 充満度をさらにどれだけ大きく、または小さくできるか
- 当該アーチが一般のトロコイド曲線であるか、あるいはその限界を超えた近似曲線であるか

例えば、あるアーチの RFI が 83% であれば、このアーチは基準 (CTDA) より充満度が大きく (CHTA タイプ)、最大充満度 (100%) までまだ余裕があることを意味します。RFI が 112% であれば、最大充満度 (100%) を超えたという意味であるため、CHTA の限界を超えた近似曲線 (nCHTAce) であることが分かります。同様に、RFI が -35% であれば充満度が小さい CETA タイプであり、-101% であれば CETA の限界を超えた近似曲線 (nCETAice) であることが分かります。

上記の定義に従い、RFI は次の式で計算できます。

a. アーチの面積が CTDA の面積以上の場合 (RFI ≥ 0[%]) :

$$\text{RFI}[\%] = \frac{\text{アーチの面積} - \text{CTDA の面積}}{\text{CHTA の面積} - \text{CTDA の面積}} \times 100$$

b. アーチの面積が CTDA の面積より小さい場合 (RFI < 0[%]) :

$$\text{RFI}[\%] = \frac{\text{アーチの面積} - \text{CTDA の面積}}{\text{CTDA の面積} - \text{CETA の面積}} \times 100$$

図 68 は、RFI の概念を示しています。RFI は、アーチを囲む長方形ではなく、maxCHTA、CTDA、minCETA の面積を尺度として使用します。

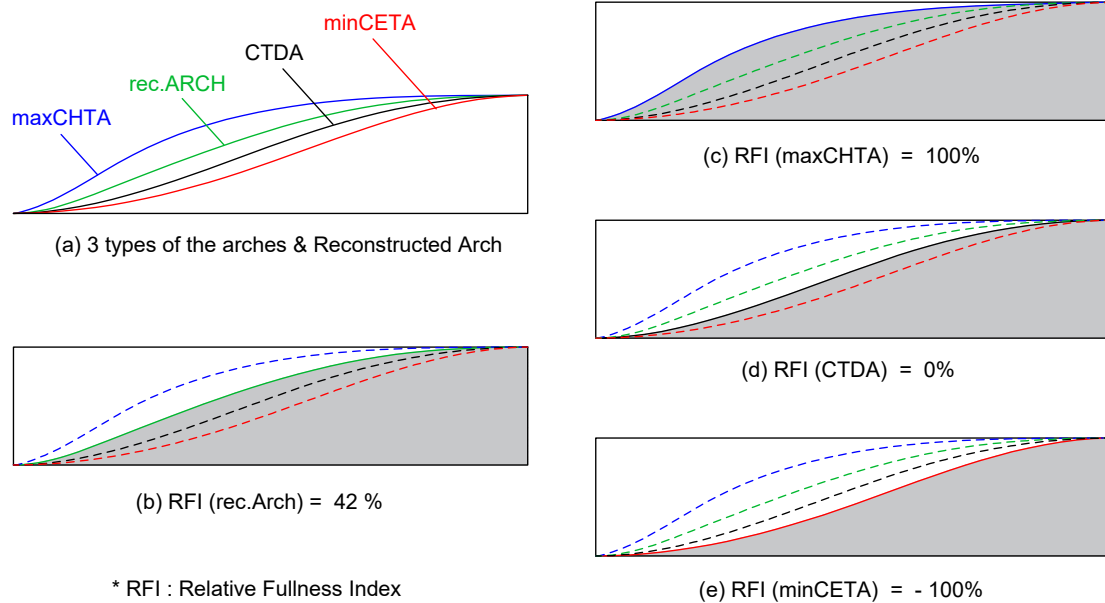


図 68: Arch area and Relative Fullness Index (RFI)

RFI で一つ注意すべき点は、+100 ~ 0% の区間と 0 ~ -100% の区間の面積変化量が互いに異なるという点です。これはトロコイド曲線の特性に起因するもので、一般的に CHTA の可変範囲が CETA の可変範囲より広いからです。

新たに定義した二つの指標を基に、これから再現されたアーチの充満度を分析し、その特徴を考察します。

表 8~10 は、すべての再現アーチの充満度を示しています。各再現アーチ (rec.Arch) と同じ幅と高さを持つ maxCHTA、CTDA、minCETA の面積、そしてこれらを基に計算した AFI と RFI の値を示します。

まず、6 番アーチを見てみましょう。表 8 を見ると、トロコイドで表現可能な充満度の範囲 (AFI 基準で minCETA 約 47%~maxCHTA 約 58%) は比較的狭く、かつ均一な分布を持っています。再現された 6 番アーチの RFI は 117% から 405% まで非常に広く分布しており、すべてトロコイドの最大充満度 (RFI 100%) を大きく超えています。これは、6 番アーチの充満度が非常に大きいことを意味します。また、概して表板の充満度が裏板より大きい傾向を示します。特にモデル D は、表板上部 (RFI 400% 以上) と裏板下部 (RFI 120% 未満) の充満度の差が非常に大きいです。

6 番アーチは、CTDA 曲線の頂点付近を長く引き伸ばした形状をしており、このために RFI が爆発的に増加します。モデル D の極端な RFI 値は、モデリングの過程で指摘したように、不正確な頂点の位置が原因と推定されます。実際に、モデル D の 6 番アーチ上部の長さは他のモデルよりはるかに長く、これが上部と下部の充満度の差を最大化する原因となっているようです。

(参考：6 番アーチは、充満度分析時に許容誤差を他のアーチの 2 倍に設定しました。)

次に、1~5 番アーチを見てみましょう。表 9~10 で、RFI が負であるアーチ (CETA、CTDAice など) は、ほぼすべて 2 番または 4 番アーチです。これはパラメータ分析の結果と同様に、2、4 番アーチは他のアーチに比べて充満度が小さいという特徴を示しています。これらのアーチはプレートのコーナー付近に位置し、端部が長く伸びる形状を帯びるため、充満度が低くなると考えられます。RFI が正の場合でも、他のアーチに比べてその値が著しく低いことが

M.	P.	S.	Area [mm ²]				AFI [%]				RFI [%]	T.
			maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
A	F	U	1244.01	1112.16	977.04	1491.15	59.03	52.77	46.36	70.75	287.46	0.020
		L	1207.87	1079.41	996.54	1449.82	59.15	52.86	48.80	71.00	288.34	0.020
	B	U	1142.91	1023.63	909.64	1286.29	58.81	52.67	46.81	66.19	220.21	0.020
		L	1118.26	1000.86	948.03	1210.53	58.92	52.73	49.95	63.78	178.60	0.020
B	F	U	1768.14	1575.83	1407.11	2213.83	59.43	52.97	47.30	74.41	331.76	0.024
		L	1756.12	1563.08	1382.83	2211.13	59.54	52.99	46.88	74.97	335.71	0.024
	B	U	1625.04	1456.00	1294.11	2023.47	58.47	52.39	46.56	72.80	335.70	0.024
		L	1378.13	1228.24	1085.01	1560.59	59.30	52.85	46.69	67.16	221.74	0.024
C	F	U	4607.17	4136.30	3754.20	5985.72	58.12	52.18	47.36	75.52	392.77	0.040
		L	4399.86	3947.20	3559.57	5591.38	58.29	52.29	47.16	74.07	363.23	0.040
	B	U	3697.77	3330.29	3054.43	4558.16	57.67	51.94	47.64	71.09	334.13	0.040
		L	3774.78	3399.36	3289.01	4589.39	57.63	51.90	50.21	70.07	316.98	0.040
D	F	U	1267.91	1140.08	1007.28	1657.88	58.15	52.29	46.20	76.03	405.08	0.020
		L	1011.50	902.28	796.18	1191.74	59.47	53.05	46.81	70.06	265.02	0.020
	B	U	1460.76	1308.62	1171.55	1664.11	58.75	52.63	47.12	66.93	233.67	0.020
		L	1084.50	965.06	858.30	1105.91	59.80	53.21	47.32	60.98	117.92	0.020

表 8: Arch Area and Fullness by Model for the 6th Arch. M.:Model, P.:Front(F)/Back(B), S.:Upper(U)/Lower(L), Type:CTDAcec, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (calculation tolerance for distance to arch width, height, and fullness control point).

確認できます。

もう一つの特徴は、5 番アーチの RFI が他のアーチに比べて大きいという点です。RFI が 100 を超えて近似曲線で再現されたケースも多く、これはパラメータ分析の結果と一致します。

アーチのタイプを見ると、nCHTAce で再現されたアーチはすべて RFI が 100% を超えています。これは、トロコイドの限界を超えた「理論的に存在しないアーチ」を近似曲線で具現したことを意味します。一方、モデル D の nCETAice アーチは RFI が -56.81% で、限界値である -100% には達していません。これは、「理論的には存在するが、計算上の問題で再現できなかった場合」に該当し、計算精度を高めれば一般の CETA で再現が可能になるでしょう。

加えて、モデル A-F-B-4 アーチは RFI が -3.16% であるにもかかわらず、CETA ではなく CTDAice タイプになっています。これは、作成しようとする曲線が CTDA に非常に類似しているため、CETA で作成するには大きすぎる R 値が必要となるため、近似曲線を作成したという意味です。しかし、モデル A-B-S-4 アーチは、計算に失敗したため近似曲線を作成したと判断できます。

(参考：表にはありませんが、基準となる CTDA と maxCHTA の AFI は、アーチの幅／高さの比率に影響を受けるようです。一般的に、幅に比べて高さが高いほど AFI が大きくなる傾向があります。)

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm ²]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
A	F	B	1	CHTA	438.41	358.32	333.05	392.56	66.71	54.52	50.68	59.73	42.76	0.010
			2	CHTA	491.11	412.68	372.66	417.85	67.08	56.37	50.90	57.08	6.59	0.010
			3	CHTA	397.35	345.53	308.31	368.65	67.67	58.84	52.50	62.78	44.61	0.010
			4	CTDAIce	619.02	514.80	472.00	513.44	67.13	55.83	51.19	55.68	-3.16	1E-09
			5	CHTA	562.90	494.16	456.61	549.70	61.56	54.04	49.93	60.11	80.80	0.010
		S	1	CHTA	433.54	354.45	313.96	395.93	66.75	54.58	48.34	60.96	52.45	0.010
			2	CHTA	487.98	410.23	363.44	419.56	67.11	56.41	49.98	57.70	12.01	0.010
			3	CHTA	395.82	344.44	307.84	371.94	67.66	58.88	52.62	63.58	53.53	0.010
			4	CETA	628.53	522.23	510.58	513.28	67.08	55.74	54.49	54.78	-76.77	0.010
			5	CHTA	572.09	502.94	452.45	553.33	61.38	53.96	48.55	59.37	72.86	0.010
	B	S	1	CHTA	314.46	278.60	246.86	302.66	60.37	53.48	47.39	58.10	67.10	0.010
			2	CETA	440.23	365.05	331.73	362.06	67.08	55.63	50.55	55.17	-8.98	0.010
			3	CHTA	341.93	295.66	266.04	312.88	67.74	58.58	52.71	61.99	37.20	0.010
			4	CTDAIce	553.27	456.96	420.23	447.18	67.14	55.45	51.00	54.27	-26.62	1E-09
			5	nCHTAce	421.79	375.45	336.56	437.57	59.68	53.12	47.62	61.91	134.05	0.010
		B	1	CHTA	311.22	275.57	246.63	300.40	60.45	53.53	47.90	58.35	69.65	0.010
			2	CTDAIce	438.54	363.79	326.70	363.69	67.08	55.65	49.98	55.63	-0.29	1E-09
			3	CHTA	339.83	294.09	267.57	312.68	67.75	58.63	53.34	62.34	40.65	0.010
			4	CETA	552.70	456.27	404.97	446.20	67.19	55.46	49.23	54.24	-19.63	0.010
			5	nCHTAce	420.57	374.44	335.60	441.89	59.68	53.13	47.62	62.70	146.21	0.010
B	F	B	1	CHTA	657.20	542.12	489.52	590.90	67.03	55.30	49.93	60.27	42.39	0.012
			2	CETA	806.32	691.02	625.85	685.86	67.57	57.90	52.44	57.47	-7.91	0.012
			3	CHTA	569.58	499.91	443.22	544.19	67.33	59.10	52.40	64.33	63.57	0.012
			4	CTDAce	946.67	791.33	727.81	793.72	67.33	56.28	51.77	56.45	1.54	1E-09
			5	CHTA	831.36	726.57	704.83	819.39	62.04	54.22	52.60	61.14	88.58	0.012
		S	1	CHTA	660.86	545.17	524.07	586.30	66.99	55.26	53.12	59.43	35.55	0.012
			2	CHTA	801.62	687.14	630.27	693.67	67.61	57.96	53.16	58.51	5.70	0.012
			3	CHTA	578.41	506.63	452.45	545.83	67.31	58.96	52.65	63.52	54.61	0.012
			4	CHTA	948.94	792.76	730.34	800.68	67.36	56.27	51.84	56.83	5.07	0.012
			5	CHTA	833.67	728.67	667.01	823.77	62.02	54.21	49.62	61.28	90.58	0.012
	B	S	1	CHTA	462.98	406.17	366.75	452.99	61.60	54.04	48.80	60.27	82.41	0.012
			2	CHTA	593.16	492.56	453.88	506.47	67.31	55.89	51.50	57.47	13.83	0.012
			3	CHTA	482.01	412.57	371.82	452.63	67.34	57.64	51.94	63.23	57.69	0.012
			4	CHTA	801.57	658.84	633.13	673.44	67.30	55.32	53.16	56.54	10.23	0.012
			5	nCHTAce	613.56	544.99	491.23	614.57	59.94	53.25	47.99	60.04	101.48	0.012
		B	1	CHTA	464.43	407.62	373.33	453.54	61.56	54.03	49.48	60.11	80.82	0.012
			2	CHTA	597.77	496.29	476.69	507.53	67.26	55.84	53.64	57.11	11.07	0.012
			3	CHTA	482.84	413.46	367.74	447.98	67.29	57.62	51.25	62.43	49.76	0.012
			4	CHTA	803.26	659.86	605.37	677.63	67.33	55.31	50.74	56.80	12.39	0.012
			5	nCHTAce	617.28	548.99	512.77	623.45	59.84	53.22	49.71	60.44	109.03	0.012

表 9: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5 (1/2). M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (for arch width, height, and distance to fullness control point).

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm ²]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	rec.Arch	
C	F	S	1	CHTA	1601.13	1403.81	1290.47	1495.07	61.73	54.12	49.75	57.64	46.25	0.020
			2	CHTA	1751.12	1454.56	1306.96	1468.41	67.08	55.72	50.06	56.25	4.67	0.020
			3	CHTA	1529.66	1305.71	1153.25	1398.67	67.53	57.64	50.91	61.75	41.51	0.020
			4	CHTA	2283.76	1915.45	1693.04	1953.72	65.35	54.81	48.45	55.91	10.39	0.020
			5	nCHTAce	2228.60	1978.54	1791.83	2240.74	60.19	53.43	48.39	60.52	104.85	0.020
		B	1	CHTA	1623.55	1423.53	1282.79	1500.40	61.65	54.06	48.71	56.98	38.43	0.020
			2	CHTA	1742.57	1447.54	1311.77	1461.02	67.11	55.75	50.52	56.27	4.57	0.020
			3	CHTA	1523.98	1302.14	1149.38	1395.19	67.49	57.67	50.90	61.79	41.95	0.020
			4	CHTA	2285.07	1917.31	1710.34	1953.84	65.32	54.81	48.89	55.85	9.93	0.020
			5	CHTA	2259.07	2006.80	1857.80	2247.26	60.09	53.38	49.42	59.78	95.32	0.020
	B	B	1	CHTA	1264.33	1121.80	1065.03	1197.11	60.19	53.41	50.70	56.99	52.83	0.020
			2	CHTA	1511.29	1231.80	1195.99	1243.91	67.17	54.75	53.16	55.29	4.33	0.020
			3	CHTA	1261.20	1056.34	982.03	1172.06	67.36	56.42	52.45	62.60	56.49	0.020
			4	CHTA	1717.17	1508.94	1447.62	1566.08	61.47	54.01	51.82	56.06	27.44	0.020
			5	nCHTAce	1709.82	1528.82	1494.61	1711.93	59.02	52.77	51.59	59.09	101.17	0.020
		S	1	CHTA	1261.65	1118.90	1026.17	1205.85	60.23	53.42	48.99	57.57	60.91	0.020
			2	CETA	1538.47	1252.59	1142.26	1237.70	67.14	54.66	49.85	54.01	-13.50	0.020
			3	CHTA	1290.88	1078.21	978.35	1174.37	67.38	56.28	51.06	61.29	45.22	0.020
			4	CHTA	1723.51	1515.20	1390.93	1574.91	61.42	54.00	49.57	56.12	28.67	0.020
			5	CHTA	1722.60	1540.19	1468.92	1708.31	59.00	52.75	50.31	58.51	92.17	0.020
D	F	B	1	CHTA	451.65	367.52	328.91	374.40	67.11	54.61	48.87	55.63	8.17	0.010
			2	CETA	483.63	405.21	360.98	378.82	67.52	56.57	50.40	52.89	-59.67	0.010
			3	CHTA	395.24	344.83	303.73	350.43	68.04	59.36	52.29	60.33	11.10	0.010
			4	nCETAice	635.58	525.72	466.51	492.08	67.38	55.74	49.46	52.17	-56.81	0.010
			5	CHTA	588.83	516.99	466.95	535.93	61.55	54.04	48.81	56.02	26.37	0.010
		S	1	CHTA	462.01	375.35	337.06	390.37	67.05	54.47	48.92	56.65	17.33	0.010
			2	CETA	492.63	412.91	373.60	398.44	67.54	56.61	51.22	54.62	-36.81	0.010
			3	CETA	406.70	355.01	321.32	350.25	68.02	59.38	53.74	58.58	-14.11	0.010
			4	CETA	643.71	530.87	483.33	519.53	67.40	55.59	50.61	54.40	-23.84	0.010
			5	CHTA	594.97	519.89	459.73	571.06	62.05	54.22	47.94	59.55	68.15	0.010
	B	S	1	CHTA	333.72	294.67	261.36	307.40	60.81	53.70	47.63	56.02	32.61	0.010
			2	CHTA	417.73	345.45	312.43	350.65	67.29	55.65	50.33	56.48	7.18	0.010
			3	CHTA	352.07	302.90	275.33	311.84	67.87	58.39	53.08	60.12	18.20	0.010
			4	CHTA	552.46	450.16	411.22	467.57	67.24	54.79	50.05	56.91	17.02	0.010
			5	nCHTAce	364.28	326.52	307.78	382.66	58.67	52.59	49.57	61.63	148.69	0.010
		B	1	CHTA	313.10	276.50	250.79	290.28	60.79	53.68	48.69	56.36	37.66	0.010
			2	CETA	402.63	333.53	307.95	321.49	67.37	55.80	51.52	53.79	-47.07	0.010
			3	CHTA	349.46	302.07	278.52	302.97	67.89	58.68	54.11	58.86	1.90	0.010
			4	CETA	545.03	445.20	403.43	432.90	67.18	54.88	49.73	53.36	-29.46	0.010
			5	CHTA	346.93	310.82	286.68	317.10	58.74	52.63	48.54	53.69	17.39	0.010

表 10: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5 (2/2). M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (for arch width, height, and distance to fullness control point).

8.2.4. 誤差分析

再現アーチとモデルアーチの誤差は、次のように定義します。まず、二つのアーチの頂点を一致させて重ねた後、二つの曲線の間の面積である「誤差面積 (mm^2)」を求めます。次に、この誤差面積をモデルアーチの長さ (mm) で割り、「単位長さあたりの誤差 (mm^2/mm)」を計算します。この値が小さいほど、二つの曲線はより類似していると判断し、「0」であれば完全に同一の曲線です。すべてのアーチについて単位長さあたりの誤差を計算し、これを基にグループ別および全体の誤差の平均 (mm) と標準偏差 (mm) を求めます。

誤差面積は、二つの曲線が作る閉曲線を積分して求めます。この際、再現過程で設定した許容誤差のため、二つのアーチの幅と高さに微細な差が発生し、これによりアーチの端部がわずかにずれることになります。このずれた部分では閉曲線が形成されないため、幅がより短い方の端から垂線を引いて閉じた図形を作成した上で、積分を実行しました。計算には、別途製作したプログラムを使用しました。

図 69 は、二つの曲線が作る閉曲線、すなわち誤差面積を示しています。黒い曲線がモデルアーチ、赤い曲線が再現アーチである場合、緑色の斜線領域がまさに「誤差面積」です。

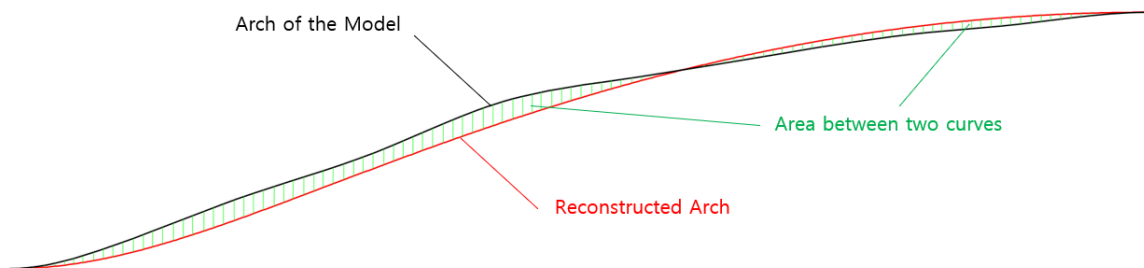


図 69: Area between the two curves (error area)

個々のアーチの誤差を求めた後、1 番、2 番、3 番など位置別にグループに分け、各グループの誤差の平均を求めます。位置によってアーチの形態的性格が異なるためです。グループ別および全体の誤差の平均を確認することで、再現方法の信頼性を一次的に評価することができます。

次に、標準偏差を確認します。平均値だけではデータの分布を知ることができないためです。例えば、二つの集団 [-5, -3, 3, 5] と [-1, 0, 0, 1] の平均は共に 0 ですが、最初の集団の方が二番目の集団よりデータが平均からずっと離れて散らばっています。標準偏差は、データが平均を中心にどれだけ散らばっているかを示す尺度です。標準偏差が小さいほど、データが平均値の周りに集まっていることを意味します。したがって、標準偏差を併せて確認することで、再現方法の信頼性をより深く評価することができます。

(※ 標本標準偏差を使用し、括弧内に母標準偏差を併記しました。)

表 11 は単位長さあたりの誤差と標準偏差を、表 12 は各アーチペアの元データをグループ別にまとめたものです。ここで最も際立った特徴は、1 番アーチの誤差が最も小さいという点です。6 番アーチを除けば、誤差は 1 番 < 2 番 < 4 番 < 3 番 < 5 番アーチの順に大きくなります。標準偏差もこれと類似した傾向を示し、1、2 番アーチの変形が最も少ないことが分かります。

表板と裏板を比較すると、全体的に裏板の誤差の方が小さいです。これは、裏板の変形が表板より少ないためと考えられます。一方、6 番アーチは再現方法が複雑であったにもかかわらず、他のアーチよりもむしろ誤差が小さく現れ

ました。全体の誤差の平均は 0.2 未満であり、特に 6 番アーチは 0.161 という満足のいく結果を示しました。標準偏差もまた 0.1 未満の小さな値で、再現結果が比較的に均一であることを示しています。

元のモデルの不規則な表面、プレートの変形、計算上の許容誤差などをすべて考慮すると、この程度の誤差の平均と標準偏差は、本再現方法が十分に高い信頼性を持っていることを証明します。

Group	Arch	Error per unit length [mm ² /mm]				Std. Dev. SD (PSD)					
		Min.	Max.	Avg.							
1	Front-1st	0.044	0.261	0.147	0.141	0.184	0.180	0.083	0.066	0.102 (0.101)	0.097 (0.096)
2	Back-1st	0.043	0.177	0.134				0.050			
3	Front-2nd	0.089	0.391	0.199	0.183			0.111	0.096		
4	Back-2nd	0.043	0.293	0.167				0.082			
5	Front-3rd	0.107	0.325	0.213	0.201			0.083	0.094		
6	Back-3rd	0.062	0.385	0.190				0.108			
7	Front-4th	0.086	0.326	0.181	0.194			0.098	0.122		
8	Back-4th	0.062	0.429	0.207				0.148			
9	Front-5th	0.088	0.495	0.206	0.203			0.122	0.121		
10	Back-5th	0.055	0.379	0.199				0.129			
11	Front-6th-U	0.111	0.159	0.127	0.154	0.161	0.021	0.052	0.065 (0.063)		
12	Back-6th-U	0.104	0.257	0.181			0.063				
13	Front-6th-L	0.084	0.296	0.178	0.168		0.093	0.079			
14	Back-6th-L	0.060	0.236	0.157			0.074				

表 11: Error data per unit length by group

Group	Arch	Error Area [mm ²]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm ² /m]	Group	Arch	Error Area [mm ²]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm ² /m]
1	A-F-1-B	10.226	76.149	0.134	7	A-F-4-B	7.460	79.890	0.093
	A-F-1-S	11.505	75.283	0.153		A-F-4-S	6.994	81.163	0.086
	B-F-1-B	3.812	86.202	0.044		B-F-4-B	23.782	95.154	0.250
	B-F-1-S	3.973	86.723	0.046		B-F-4-S	24.189	95.354	0.254
	C-F-1-B	28.723	160.600	0.179		C-F-4-B	14.760	170.583	0.087
	C-F-1-S	40.152	158.215	0.254		C-F-4-S	17.417	170.388	0.102
	D-F-1-B	19.892	76.275	0.261		D-F-4-B	20.146	81.371	0.248
	D-F-1-S	8.581	78.424	0.109		D-F-4-S	27.047	83.068	0.326
2	A-B-1-B	11.821	76.272	0.155	8	A-B-4-B	10.492	77.900	0.135
	A-B-1-S	11.069	76.988	0.144		A-B-4-S	8.251	77.976	0.106
	B-B-1-B	14.352	86.266	0.166		B-B-4-B	5.905	95.017	0.062
	B-B-1-S	15.008	85.928	0.175		B-B-4-S	7.156	94.863	0.075
	C-B-1-B	27.631	156.323	0.177		C-B-4-B	70.837	166.484	0.425
	C-B-1-S	22.145	155.892	0.142		C-B-4-S	71.665	167.218	0.429
	D-B-1-B	5.033	74.509	0.068		D-B-4-B	13.998	81.420	0.172
	D-B-1-S	3.327	76.730	0.043		D-B-4-S	20.894	82.923	0.252
3	A-F-2-B	6.084	68.299	0.089	9	A-F-5-B	18.311	94.900	0.193
	A-F-2-S	7.458	67.836	0.110		A-F-5-S	16.584	96.689	0.172
	B-F-2-B	26.978	78.806	0.342		B-F-5-B	21.105	112.430	0.188
	B-F-2-S	30.649	78.291	0.391		B-F-5-S	18.924	112.799	0.168
	C-F-2-B	15.051	134.954	0.112		C-F-5-B	18.517	209.786	0.088
	C-F-2-S	21.449	135.660	0.158		C-F-5-S	30.302	206.642	0.147
	D-F-2-B	13.124	66.496	0.197		D-F-5-B	47.980	96.976	0.495
	D-F-2-S	12.714	67.096	0.189		D-F-5-S	19.133	95.194	0.201
4	A-B-2-B	7.055	68.277	0.103	10	A-B-5-B	6.117	94.354	0.065
	A-B-2-S	10.504	68.531	0.153		A-B-5-S	7.377	94.640	0.078
	B-B-2-B	14.923	78.396	0.190		B-B-5-B	37.108	112.574	0.330
	B-B-2-S	16.478	77.747	0.212		B-B-5-S	35.063	111.712	0.314
	C-B-2-B	33.017	137.652	0.240		C-B-5-B	36.802	203.237	0.181
	C-B-2-S	41.008	140.188	0.293		C-B-5-S	38.955	204.817	0.190
	D-B-2-B	6.784	64.402	0.105		D-B-5-B	5.144	94.144	0.055
	D-B-2-S	2.874	66.540	0.043		D-B-5-S	36.946	97.361	0.379
5	A-F-3-B	11.216	52.666	0.213	11	A-F-6-U	27.506	173.469	0.159
	A-F-3-S	12.161	52.520	0.232		B-F-6-U	23.877	199.364	0.120
	B-F-3-B	14.061	62.691	0.224		C-F-6-U	45.537	378.590	0.120
	B-F-3-S	10.806	63.564	0.170		D-F-6-U	21.605	194.149	0.111
	C-F-3-B	35.778	110.249	0.325	12	A-B-6-U	32.973	169.548	0.194
	C-F-3-S	35.522	110.583	0.321		B-B-6-U	36.110	214.484	0.168
	D-F-3-B	5.465	51.155	0.107		C-B-6-U	92.649	360.992	0.257
	D-F-3-S	5.879	51.870	0.113		D-B-6-U	20.094	193.230	0.104
6	A-B-3-B	8.207	49.235	0.167	13	A-F-6-L	21.401	168.116	0.127
	A-B-3-S	7.904	49.584	0.159		B-F-6-L	40.678	197.677	0.206
	B-B-3-B	3.866	62.371	0.062		C-F-6-L	106.601	360.537	0.296
	B-B-3-S	4.458	62.167	0.072		D-F-6-L	12.551	148.740	0.084
	C-B-3-B	30.750	108.894	0.282	14	A-B-6-L	24.118	165.571	0.146
	C-B-3-S	42.876	111.394	0.385		B-B-6-L	33.268	179.422	0.185
	D-B-3-B	7.628	49.617	0.154		C-B-6-L	86.874	368.659	0.236
	D-B-3-S	12.091	50.768	0.238		D-B-6-L	9.020	149.513	0.060

表 12: Raw data of error per unit length by group. Abbreviation: Model(A/B/C/D) - Plate(Front/Back) - Arch N.(1/2/3/4/5/6) - Side(Bass bar/Sound post or Upper/Lower))

9. 楽器製作への適用

これまで、4つのモデルのアーチを再現する過程を見てきました。この研究の最終的な目的は、研究に使用されたモデルとサイズが異なる楽器にもストラディバリ・アーチを適用する方法を見つけることです。したがって、本章では、アーチの幅と高さが異なる場合にこの方法をどのように適用するかを考察します。以前と同様に、1～5番アーチと6番アーチに分けて説明します。

9.1. 1～5番アーチ

アーチを作成するために必要なパラメータは、アーチの幅と高さ、および充満度制御点の位置です。幅はプレートの広さとエッジの幅に応じて製作者が直接決定します。高さは6番アーチを作成すれば自動的に決定されます。したがって、充満度制御点の位置さえ分かれば、アーチを作成することができます。

ストラディバリ・アーチの形状を再現することが目標であるため、基準となる「標準モデル」が必要です。この標準モデルは、新しい楽器の充満度制御点の位置を計算する尺度となります。すなわち、アーチの端点からの相対的な距離を比例的に適用するのです。

例えば、1番アーチの標準モデルを「モデルAの表板左側1番アーチ」と定めたと仮定しましょう。この標準モデルにおいて、充満度制御点はアーチの端点から横（x軸）に25.91、縦（y軸）に3.9離れています。もし、標準モデルより幅が1.1倍、高さが0.9倍の新しいアーチを作成する場合、充満度制御点の位置は次のように計算されます。

横方向の位置： $25.91 \times 1.1 = 28.50$ 、縦方向の位置： $3.9 \times 0.9 = 3.51$

このように計算された位置を通過するトロコイド曲線を作成すればよいのです。実際の適用時には、標準モデルの幅と高さに対する充満度制御点の「位置比率」をあらかじめ求めておき、この比率を新しく作成する楽器の幅と高さに掛ければよいのです。例えば、標準モデルの充満度制御点の位置比率が次のようであると仮定します。

$$\begin{aligned} \text{x 軸方向の位置比率 (Rate_Zx)} &= \frac{(\text{アーチ端点から充満度制御点までの x 軸距離})}{(\text{アーチ半分の幅})} \\ &= \frac{25.91}{75.53} \\ &= 0.3430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y 軸方向の位置比率 (Rate_Zy)} &= \frac{(\text{アーチ端点から充満度制御点までの y 軸距離})}{(\text{アーチの高さ})} \\ &= \frac{7.2 - 3.3}{12.0 - 3.3} = \frac{3.9}{8.7} \\ &= 0.3793 \end{aligned}$$

この比率を用いて、作成しようとするアーチ（幅 81.0mm、高さ 7.8mm）の充満度制御点の位置を次のように計算できます。

$$\begin{aligned}\text{アーチ端点から充満度制御点までの } x \text{ 軸距離} &= \text{アーチの幅} * \text{Rate_Zx} \\ &= 81.0 * 0.3430 \\ &= 27.783\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{アーチ端点から充満度制御点までの } y \text{ 軸距離} &= \text{アーチの高さ} * \text{Rate_Zx} \\ &= 7.8 * 0.3793 \\ &= 2.9585\end{aligned}$$

このように、各アーチの充満度制御点の位置比率さえ知っていれば、楽器の幅と高さが変わっても、標準モデルと同じ比率の充満度を持つアーチを作成することができます。

9.2. 6 番アーチ

6 番アーチは形状制御点が追加されるため、アーチの「形状」自体を決定する情報も必要です。1～5 番アーチは 3 点（頂点、端点、充満度制御点）を通過するトロコイド曲線がただ一つしか存在しませんが、6 番アーチはこの 3 点を通過する曲線が無数に存在するため、形状を特定するための次の追加変数が必要です。

- 3 次多項式曲線の振幅：アーチの高さに比例。充満度制御点と同様に、標準モデルのアーチの高さに対する振幅の「比率」を計算して適用する。
- 柄の方向と指数値：アーチの幅や高さに関係なく形状を決定する固有値であるため、標準モデルの値をそのまま使用する。

例えば、標準モデル（モデル A の表板 6 番上部、高さ 15.1、振幅-9.1）の 3 次多項式曲線の振幅比率は次のようになります。

$$\begin{aligned}\text{3 次多項式曲線の振幅比率 (Rate_bamp)} &= \frac{\text{(3 次多項式曲線の振幅)}}{\text{(アーチの高さ)}} \\ &= \frac{-7.313}{(15.5 - 3.3)} \\ &= -0.5946\end{aligned}$$

新しく作成するアーチの高さが 11.9 の場合、ここで使用される 3 次多項式曲線の振幅は次のようになります。

$$\begin{aligned}\text{3 次多項式曲線の振幅} &= \text{(アーチの高さ)} * \text{(Rate_bamp)} \\ &= 11.9 * (-0.5946) = -7.0757\end{aligned}$$

（※ 3 次多項式曲線の振幅は常に負であり、数字の前のマイナス記号（-）は柄の方向を意味します。）

結論として、標準モデルの 3 次多項式曲線の振幅と柄の方向（-7.0757）、指数値（-0.613）、および充満度制御点の位置（計算方法は 1～5 番アーチと同じ）が分かっているならば、アーチの幅と高さが変わっても、標準モデルと同じ比率の充満度と形状を持つアーチを作成することができます。

10. 結論および考察

ストラディバリ・アーチは、その位置によって膨らみの度合い、すなわち「充満度 (Fullness)」が異なります。分析の結果、2 番と 4 番のアーチは充満度が小さく、一方で 5 番は大きく、6 番は非常に大きいという特徴が見られました。このように多様な充満度を実現するためには、アーチの幅と高さを維持しつつ、充満度を調整できる必要があります。

従来、有力なモデルとされてきたカーテイト・トロコイド (Curtate Trochoid) 曲線は、充満度を調整できないため、ストラディバリ・アーチには使用できません。しかし、ある円が他の円に内接または外接しながら転がる際に生成されるカーテイト・ハイポトロコイド (Curtate Hypotrochoid) 曲線とカーテイト・エピトロコイド (Curtate epitrochoid) 曲線は、充満度を調整可能であり、これらによってストラディバリ・アーチを再現できることを確認できました。

ただし、これら 2 つの曲線にも充満度の調整には限界があり、その限界を超える場合には「パターン曲線」を用いて作成した「近似曲線」によって再現することができます。その際、指数関数的に歪ませたカタナリー曲線をパターンとして使用し、この曲線の座標値に応じてトロコイド曲線を変形させることで近似曲線を得ます。独特な形状を持つ 6 番のアーチは、指数関数的に歪ませた 3 次多項式曲線とカタナリー曲線をパターンとし、カーテイト・トロコイドを変形させることで再現しました。

上記の方法で再現したアーチは、画像、パラメータ、充満度、および誤差の分析を通じて、オリジナルと非常によく似ていることが確認されました。

幅と高さがそれぞれ異なるアーチの充満度を、より客観的かつ定量的に比較するため、本書では「絶対的充満度指数 (Absolute Fullness Index)」と「相対的充満度指数 (Relative Fullness Index)」という新たな指標を導入しました。これらの指標によって、再現アーチの充満度の特性を定量化することができ、その結果はオリジナルのストラディバリ・アーチ固有の特性を示すものと言えます。

再現した全アーチの単位長さあたりの誤差の平均は約 $0.180(mm^2/mm)$ 、標本標準偏差は 0.097 でした。元となったアーチの不規則な表面や歪みを考慮すると、この再現手法の正確性と信頼性が非常に高いことを示唆しています。もし歪みがなく滑らかな左右平均曲線を対象としていれば、誤差はこれより大幅に減少すると予想されます。

この再現方法を実際の楽器製作に応用するには、基準となる「標準モデル」が必要です。製作者はこの標準モデルの充満度制御点の位置比率とパターン曲線のパラメータ比率を用いることで、自身が望むサイズの楽器においても、標準モデルと同一比率の充満度を持つアーチを作ることができます。したがって、この手法を成功裏に活用するためには、歪みが少なく十分なデータを抽出できる理想的な標準モデルを確保することが何よりも重要です。

本研究にはいくつかの課題があります。第一に、標本数が少ない点です。これは再現プロセスの信頼性だけでなく、付録で扱うエッジ幅の決定にも影響を与えうる重要な問題です。第二に、6 番のアーチの再現方法がやや複雑で直感的でない点です。より簡潔で直感的な方法を見つけるための今後の研究が必要です。第三に、この再現方法は簡単な道具だけでは実現が難しい点です。ただし、この問題は将来配布予定の専用プログラムによって解決できると考えています。

300 年前のクレモナで、ストラディバリがどのような意図と方法でこのようなアーチを作り上げたのか、我々が知る由もありません。しかし本研究は、カーテイト・ハイポトロコイド、カーテイト・エピトロコイド、そして近似曲線を利用すれば、彼の作品と極めて類似したアーチを再現できるという事実を明確に示しています。

コンピューターがなかった時代に経験のみで作られたストラディバリのアーチが、現代の精密な数学的計算とほぼ一致するという事実は、私にとって大きな衝撃でした。本研究を通じて、ストラディバリ・アーチというこの美しい贈り物がより多くの人々に届けられることを願います。

11. 付録

11.1. アーチパターンの分析

(※ この内容は、標本数が少なく、筆者の推測が含まれているため、不正確である可能性があることをあらかじめお断りしておきます。)

再現するアーチが定義されれば、より深い再現のためにアーチの形状を分析する必要があります。この分析は、等高線データを用いてそのパターンを把握する過程です。このため、本章では「等高マップ (Contour map)」という新しいツールを導入します。等高マップ分析を通じて、ストラディバリ・アーチの特徴をより詳しく把握することができ、これは実際の楽器製作のためのアーチ設計に大きな助けとなるでしょう。

このような研究の究極的な目標は、現存するストラディバリ・アーチをそのまま複製することではありません。楽器が歪む前の姿、すなわち製作初期の状態を再現することです。これは結局、ストラディバリの製作意図を把握する過程であり、ここには論理的な推測と想像が必要です。本章では、そのような推論過程を助けるいくつかの方法を提示します。

アーチの再現時に考慮すべき点は、大きく二つに分けることができます。第一は、個々のアーチをどれだけ忠実に再現するかであり、第二は、アーチ間の関係をどれだけうまく反映するかです。再現されたアーチは、元と微細な差を持たざるを得ません。この差は、個々のアーチだけを見てはよく分かりませんが、他のアーチとの関係の中ではより明確に見えることがあります。したがって、アーチ間の相互関係まで忠実に再現してこそ、正しい再現と言えるでしょう。

アーチ間の相互関係を把握する最も一般的な方法は、全体の等高線を確認することです。しかし、これは作成が難しく、関係を比較するには非効率的である可能性があります。これらの短所を克服するために、「等高マップ」という新しい分析ツールを導入しました。等高マップは、全体の等高線の骨格をまとめた図と、これを一覧に整列させた図で構成されます。

図 70 の「等高マップ-A」は、全体の等高線の骨格を示しています。

- 構成：左は表板、右は裏板を示す。赤い点はアーチの端点と頂点を、黒い点は等高線の位置を意味する。
- 中央連結線：表板と裏板の同じ順番の等高点を直線で結び、6 番アーチの形状の違いを一目で比較できるようにした。(高さが異なる等高点は点線で、高さが同じプレートの端は実線で連結)
- 活用：点の間隔からアーチの傾斜を把握できる。また、連結線のパターン (傾き、方向など) を通じて、表板と裏板の 6 番アーチの違いと特徴を迅速に把握するのに有用である。

等高マップ-A を通じて 6 番アーチを分析すると、表板は中央部が平坦で端に近づくほど傾斜が急になるのに対し、裏板は全体的に緩やかな曲線を描いています。一方、表板 6 番アーチ上部のエッジ幅が特に狭く見えるなど、一部、測定誤差と疑われる部分も観察されます。理想的なアーチであれば、中央連結線の傾きが徐々に変化すべきですが、6 番アーチ下部では傾きが少し不規則に変化する区間があり、アーチが滑らかでないことを示唆しています。

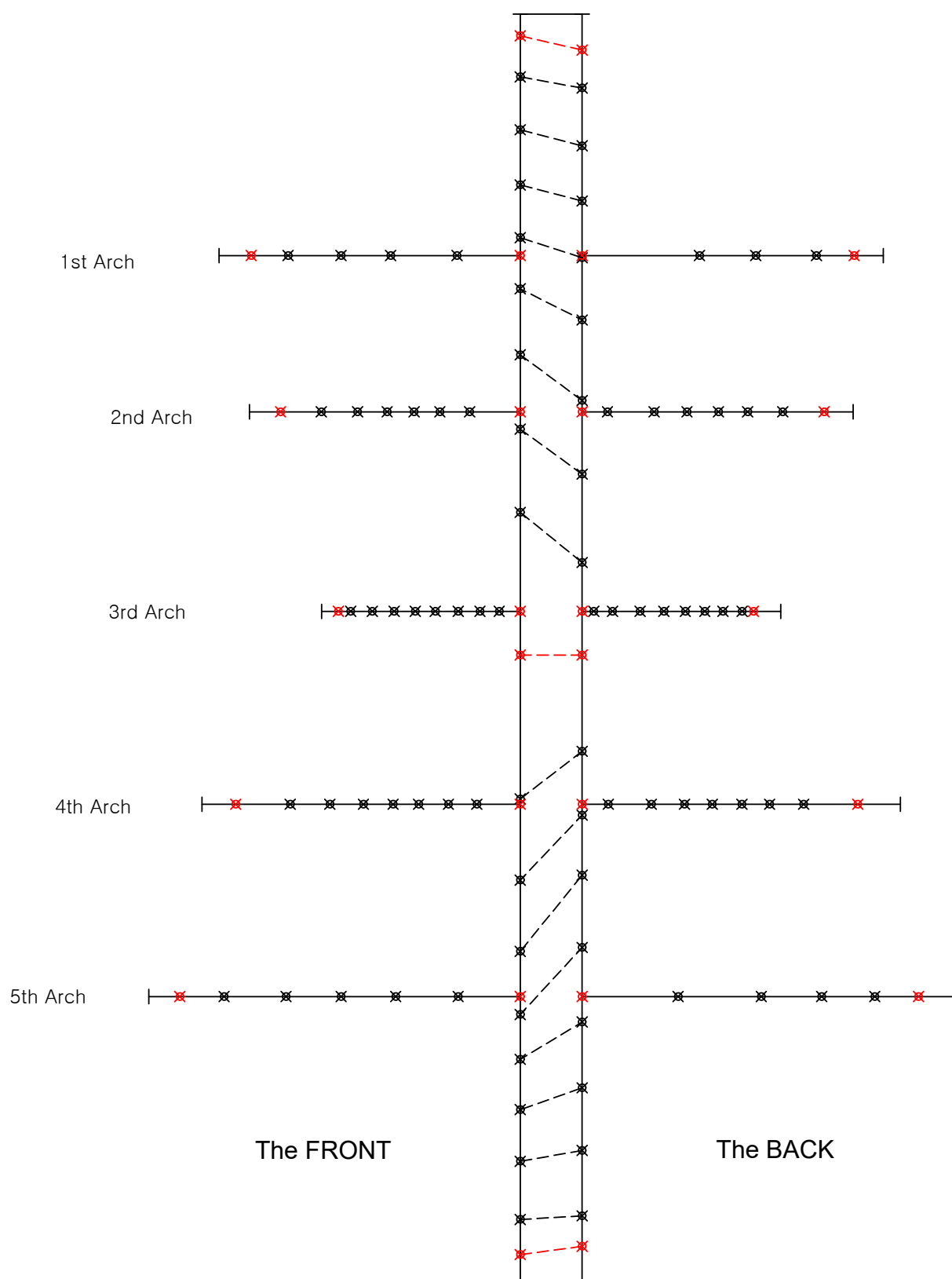


図 70: Contour map(A) of the Model A

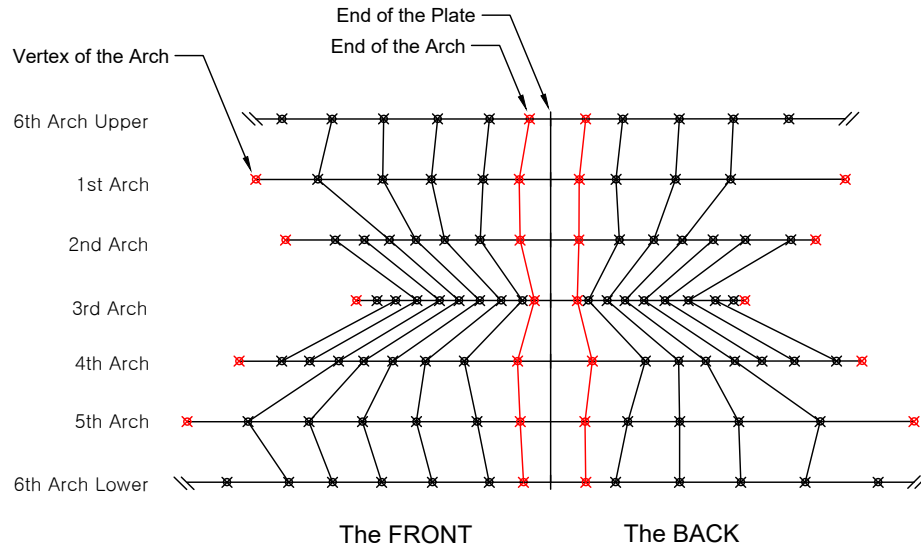


図 71: Contour map(B) of the Model A

図 71 の「等高マップ-B」は、6 つのアーチの等高線の骨格を「プレートの端点」を基準に並べて整列させた図です。

- 構成：左は表板、右は裏板である。マップ-A とは異なり、同じプレート内で同じ高さの等高点を実線で連結した。
- 活用：1～5 番アーチのパターンを互いに比較し、特に 6 番アーチと 1 番（上部）、5 番（下部）アーチの関係を把握するのに有用である。これにより、表板と裏板のパターンの違いも明確に知ることができる。

等高マップ-B を分析すると、表板の 1 番アーチは合計 4 つの等高点を持っていますが、裏板は 3 つしかありません。5 番も同様に裏板が一つ少ないです。これは、裏板のアーチが表板より早く高さが減少したことを意味します。6 番上部と 1 番、6 番下部と 5 番アーチの関係をみると、全体的に表板の場合は 1、5 番より 6 番アーチの方がより急勾配です。一方、裏板の場合は互いに似ているか、あるいは 6 番が 1、5 番よりほんの少し緩やかです。

この図で特に注目すべき部分は、赤い実線で示されたアーチの端点の位置です。アーチの端点はアーチの長さを決定するため、その位置を正確に把握することは非常に重要です。

マップに現れたアーチ端点の位置の不規則性は、データ抽出過程の誤差である可能性もあれば、元の資料自体の測定誤差である可能性もあります。手作りの楽器の特性上、アーチ端部の境界が明確でなく、正確な測定が難しいためです。

裏板下部の連結線の傾きが不規則なのは、測定点の位置が不正確であるか、曲線が滑らかでないという信号です。また、裏板 3 番アーチのエッジ幅が特に広いですが、これは 3 番アーチの充満度が異常に小さいことを意味し、当該楽器固有の特性と見られます。

最後に、モデル A、B、C のエッジ幅は部位によって異なります。現代の多くの製作者がプレートの上部（アッパーバウト）と下部（ローワーバウト）は同じにし、中央部（C バウト）はそれより狭くすることが多いですが、資料ではそうではないことが分かります。

ストラディバリの正確な製作意図は分かりませんが、モデル A、B、C を通じて次のような規則を推定することがで

きます。

L_a ：プレートの端からアーチの端点までの距離

L_c ：プレートの端から最初の等高点までの距離

- 規則 1. (表／裏板) 1～5 番アーチにおいて、 L_c の大きさは 3 番 < 1 番 < 5 番 < 2 番 < 4 番の順である。
- 規則 2. (表板) 6 番アーチ上部は、1 番アーチより傾斜が急である。
- 規則 3. (表板) 6 番アーチ下部は、5 番アーチより傾斜が急である。
- 規則 4. (表板) 6 番アーチの L_a 、 L_c は、1、5 番アーチより狭い。
- 規則 5. (裏板) 6 番アーチ上部は、1 番アーチより傾斜が緩やかか、同程度である。
- 規則 6. (裏板) 6 番アーチ下部は、5 番アーチより傾斜が緩やかか、同程度である。
- 規則 7. (裏板) 6 番アーチの L_a 、 L_c は、1、5 番アーチより広い。
- 規則 8. (表／裏板) 全体的に L_a 、 L_c は、表板より裏板の方が広い。

上記の規則を総合し、表板の全アーチに対する L_a (エッジ幅) の順序を次のように推論できます。

- 規則 9. (表板) L_a の大きさは、3 番 < 6 番 (上) < 6 番 (下) < 1 番 < 5 番 < 2 番 < 4 番の順である。

裏板の場合は標本が不足しており断定は難しいですが、上記の規則を基に次のように推測できます。

- 規則 10. (裏板) L_a の大きさは、3 番 < 1 番 < 6 番 (上) < 5 番 < 2 番 < 6 番 (下) < 4 番の順である。

最終的に、規則 9、10 を表にまとめると表 13 のようになります。

Arch	the FRONT	the BACK
6th Arch-Upper	2	3
1st Arch	4	2
2nd Arch	6	5
3rd Arch	1	1
4th Arch	7	7
5th Arch	5	4
6th Arch-Lower	3	6

表 13: Order of Edge Width

このようなエッジ幅の順序を参考にすれば、ストラディバリ・アーチをより忠実に再現する助けとなるでしょう。

11.2. モデル A の原型アーチの推測

本報告書で再現したアーチは、長い歳月を経て変形した現在の姿を基準としています。しかし、私たちが真に知りたいのは、変形が起こる前、すなわち製作者が意図した 300 年前の原型でしょう。

本章では、このような変形を補正し、論理的な推論を加えて疑わしいアーチ端点の位置を修正することで、300 年前の製作当時の姿を再現します。このため、まずプレート左右のデータの平均値を用いて歪みや測定誤差を減らし、前述の方法に従ってエッジ幅を補正しました。

(※ 仮にモデル A が「メサイア」のデータであったとしても、本再現結果を実際のメサイアのデータと比較することは正しくありません。本結果は、凹凸のある曲線の資料データを基に推定したものであるためです。実際に、一部のアーチの高さは、資料のデータより最大 0.5(mm) の誤差を持っています。)

再現の結果物は PDF および DXF ファイル形式で添付しており、以下は各添付ファイルに関する説明です。

- Front/Back_All_Arches.pdf: すべてのアーチと関連データ (bamp: 3 次多項式曲線の振幅と柄の方向、camp: カテナリー曲線の振幅、pamp: 最終パターン曲線の振幅、expo: 指数値、tc: 許容誤差)
- Front/Back_All_Arches_Plate.pdf: プレートを含むすべてのアーチと関連データ
- Front/Back_Contour_Map.pdf: 等高マップ
- Contour_Map_Comparison_A/B.pdf: 表裏板の等高マップ比較
- Front/Back_All_Arches.dxf: すべてのアーチ (出力用の汎用 CAD ファイル)

(※ 上記の添付ファイルは、筆者が製作した「Violin Arch Designer - ver. 1.0.0」で作成されました。)

11.3. 短縮表記と充満度領域

表記	説明
TD	(Trochoid) トロコイド曲線の総称
CTD	(Curtate Trochoid) 同一パターンの曲線が連続するカーテイト・トロコイド曲線
CHT	(Curtate Hypotrochoid) 同一パターンの曲線が連続するカーテイト・ハイポトロコイド曲線
CET	(Curtate Epitrochoid) 同一パターンの曲線が連続するカーテイト・エピトロコイド曲線
CTDA	(Curtate Trochoid Arch) CTD から抽出したアーチ曲線
CHTA	(Curtate Hypotrochoid Arch) CHT から抽出したアーチ曲線。(CTDA より充満度が大きい。)
CETA	(Curtate Epitrochoid Arch) CET から抽出したアーチ曲線。(CTDA より充満度が小さい。)
nCHTA	(near.CHTA) 目標とする CHTA の近くにある CHTA。(CTDA より充満度が大きい。)
nCETA	(near.CETA) 目標とする CHTA の近くにある CETA。(CTDA より充満度が小さい。)
maxCHTA	(maximum.CHTA) アーチの幅、高さが固定された状態で存在可能な最大充満度の CHTA
minCETA	(minimum.CETA) アーチの幅、高さが固定された状態で存在可能な最小充満度の CETA
nCHTAce	(near.CHTA.catenary.exponential) 目標とする CHTA を通常の方法で作成できない場合、近くの CHTA をカテナリー曲線および指数関数を利用して変換した近似アーチ曲線。(CTDA より充満度が大きい。)
nCETAice	(near.CETA.inverted catenary.exponential) 目標とする CETA を通常の方法で作成できない場合、近くの CETA を反転したカテナリー曲線および指数関数を利用して変換した近似アーチ曲線。(CTDA より充満度が小さい。)
CTDAce	(CTDA.catenary.exponential) 目標とする CHTA または CETA を通常の方法で作成できない場合、CTDA をカテナリー曲線および指数関数を利用して変換した近似アーチ曲線。(CTDA より充満度が大きい。)
CTDAice	(CTDA.inverted catenary.exponential) 目標とする CHTA または CETA を通常の方法で作成できない場合、CTDA を反転したカテナリー曲線および指数関数を利用して変換した近似アーチ曲線。(CTDA より充満度が小さい。)
CTDAcecc	(CTDA.cubic polynomial.exponential.catenary) CTDA をカテナリー曲線と 3 次多項式関数、指数関数を利用して変換したアーチ曲線。(6 番アーチにのみ使用、近似曲線ではない)

表 14: 短縮表記

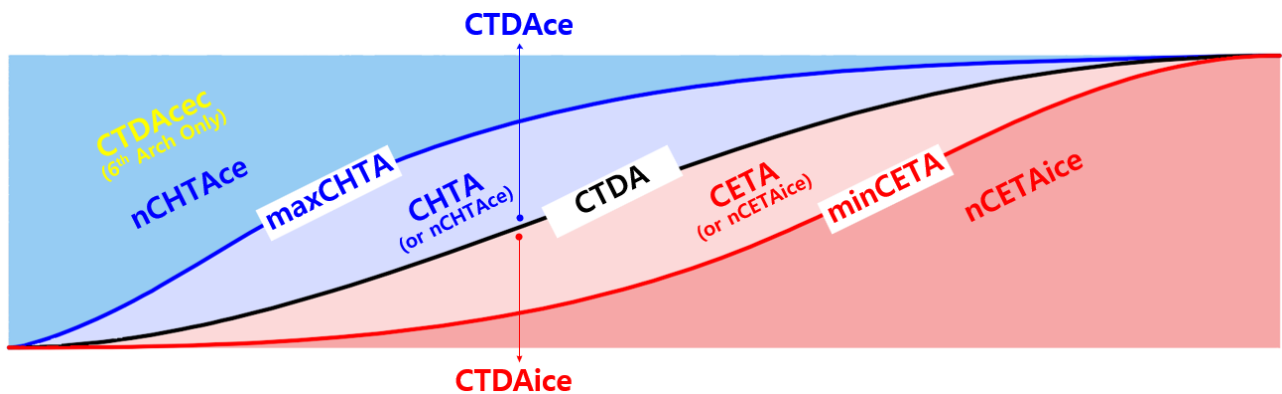


図 72: Fullness Zones by Type of Curve

参考文献

- [1] S. F. Sacconi, *I 'segreti' di Stradivari*. Cremona: Libreria del Convegno, 1972.
- [2] The Strad, *Antonio Stradivari 'Titian' Violin, 1715*, Poster, A life-size poster with detailed photographs and measurements of the instrument. Available from The Strad Shop., London, UK, n.d.
- [3] R. M. Mottola, “Comparison of Arching Profiles of Golden Age Cremonese Violins and Some Mathematically Generated Curves,” *Savart Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 172–191, 2011.

参考サイト

- H.I.S. Violin Atelier (アーチ作成プログラム) – <https://www.hisviolins.com>