

---

# La Ricostruzione della bombatura di Stradivari

Hwang, Il-Seok\*

\* H.I.S. Violin Atelier / [www.hisviolins.com](http://www.hisviolins.com) / [hisviolins@gmail.com](mailto:hisviolins@gmail.com)



---

December 8, 2025

Molti liutai tentano di ricreare la bombatura di Stradivari, ma poiché i suoi principi costruttivi rimangono sconosciuti, sono limitati alla semplice imitazione. Questo rapporto presenta un metodo per ricostruire sistematicamente la bombatura di Stradivari utilizzando le curve trocoidi (Trochoid curves). In aggiunta, si descrive un metodo per costruire la bombatura di Stradivari adattabile a qualsiasi larghezza e altezza, per la liuteria pratica.

**L**a curva nota per essere la più simile alla bombatura di Stradivari è la Trocoide Accorciata (Curtate Trochoid, di seguito «CTD»)<sup>1</sup>. Tuttavia, le bombature di Stradivari variano notevolmente nell'aspetto e la maggior parte ha una forma più piena di una CTD. Questo rende difficile l'uso della CTD per ricreare la bombatura. Pertanto, questo rapporto si propone di affrontare i problemi della curva CTD e di descrivere un metodo per ricostruire sistematicamente la bombatura di Stradivari. A tal fine, il contenuto sarà presentato nel seguente ordine.

Prima di procedere, è necessario definire un termine chiave. Il grado di rigonfiamento di una bombatura è comunemente definito «volume della bombatura». Tuttavia, poiché «volume» denota strettamente una quantità tridimensionale, è geometricamente inappropriato per l'analisi bidimensionale centrale in questo rapporto. Pertanto, questo studio introduce e utilizza il termine «Pienezza (Fullness)» per quantificare questa caratteristica planare. Una definizione dettagliata di «Pienezza» è fornita nel Capitolo 8.2.3.

In primo luogo, dobbiamo definire quale bombatura di Stradivari ricostruire. A tal fine, stabiliremo un modello di riferimento (di seguito «il modello») che sarà l'oggetto della ricostruzione. Il metodo più razionale sarebbe utilizzare la media di tutte le bombature di Stradivari esistenti come modello, ma ciò è praticamente impossibile. Pertanto, questo rapporto utilizza come modello i dati provenienti da un noto libro e da poster.

In secondo luogo, questo rapporto esaminerà i problemi della curva CTD. Inizierà spiegando la definizione, i tipi e le caratteristiche della curva Trocoide (Trochoid, di seguito «TD»). Successivamente, confrontando il modello

---

<sup>1</sup>Alcune fonti la definiscono «cicloide accorciata».

precedentemente definito con bombature di cerchio e curve CTD, questa analisi dimostrerà come la CTD si differenzia dalla bombatura di Stradivari e quanto diverse siano le forme delle bombature di Stradivari.

In terzo luogo, questa sezione dimostrerà come ricostruire le curve(arch) dal n. 1 al n. 5 utilizzando due tipi di curve TD: l'Ipotrocoide (Hypotrochoid, di seguito «HTD») e l'Epitrocoide (Epitrochoid, di seguito «ETD»).

In quarto luogo, questa sezione discuterà i limiti delle due suddette curve TD e proporrà un metodo per affrontare i casi non costruibili utilizzando curve di approssimazione.

In quinto luogo, poiché la geometria della curva(arch) n. 6 è distinta dalle altre, la sua ricostruzione richiede un approccio diverso. Questa sezione delineerà tale approccio, che si basa sui principi di generazione delle curve di approssimazione.

In sesto luogo, questa sezione finale dimostra l'applicazione pratica dei metodi proposti ricostruendo le curve(arch) di quattro modelli. Viene quindi condotta un'analisi successiva — che copre immagini comparative, parametri, pienezza ed errori — per identificare le caratteristiche della bombatura di Stradivari e per valutare l'affidabilità del metodo di ricostruzione.

Infine, il rapporto si concluderà considerando le implicazioni di questo metodo di ricostruzione per la liuteria pratica.

L'appendice fornisce un'analisi dettagliata dell'andamento delle linee di contorno, offrendo spunti sull'aspetto originale probabile della bombatura e sulle potenziali intenzioni del costruttore.

Per riferimento, tutte le unità numeriche in questo testo sono in millimetri (*mm*) se non diversamente specificato.

*Nota bene: In questo rapporto, il termine inglese «arch» viene tradotto in due modi. Il concetto tridimensionale (3D) è reso con **bombatura**, mentre la linea bidimensionale (2D) è resa con **curva**. Per distinguere quest'ultima da una curva generica, si utilizzerà la notazione **curva(arch)**.*

# 1 Definizione della curva(arch)

## 1.1 Condizione della curva(arch)

In questo rapporto, una «curva(arch)» si riferisce a una curva che soddisfa le seguenti condizioni.

### Condition 1.1. Condizioni della curva(arch)

- a. La pendenza della linea tangente deve essere «0» all'apice e ad entrambi gli estremi.
- b. La curva deve essere monotonicamente crescente o decrescente.
- c. Deve essere simmetrica rispetto all'apice.

«La pendenza della linea tangente» si riferisce alla pendenza di una linea retta che tocca la curva in un punto specifico, come mostrato dalla linea rossa continua nella Figura 1. Nella figura, la Curva A ha una pendenza della tangente pari a 0 (orizzontale) al suo apice e agli estremi. Per la Curva B, tuttavia, la pendenza agli estremi non è 0. Una pendenza della tangente pari a 0 indica che il punto è o il punto più alto (apice) o il punto più basso (estremo) della curva(arch). Se la pendenza a un estremo non è 0, come nella Curva B, quel punto non è il punto più basso della curva(arch) e quindi non può essere un estremo. Per questo motivo, una curva come la Curva B non è definita come una «curva(arch)» in questo rapporto.

Inoltre, l'altezza di una curva(arch) deve aumentare continuamente da un estremo all'apice (incremento monotono). Se esiste una sezione in cui l'altezza rimane costante (orizzontale) o diminuisce all'interno di questo intervallo, non è considerata una curva(arch). Per riferimento, la Condizione 1.1.c non viene applicata ai modelli oggetto della ricostruzione.

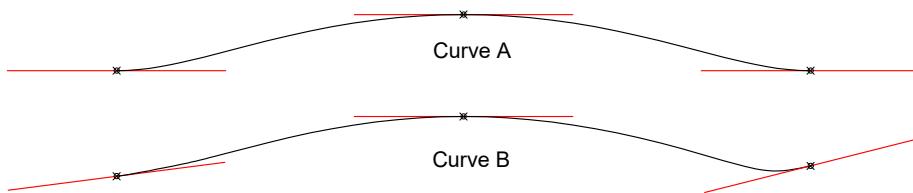


Figure 1: Tangent slopes at the apex and endpoints of an arch

## 1.2 Posizione delle Curve(arch)

Le posizioni delle sei curve(arch) sono definite come mostrato nella Figura 2 e nella Tabella 1. L'obiettivo della ricostruzione è la sezione dal punto più basso al punto più alto di ogni curva(arch). La curva(arch) n. 6 è divisa in una parte superiore e una inferiore, centrate sul suo apice. Tuttavia, la curva(arch) n. 4 del Modello D si trova appena sotto il foro a F, non alla punta inferiore.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Questo presumibilmente per evitare che la curva(arch) venga interrotta dal foro a F durante la scansione TC.

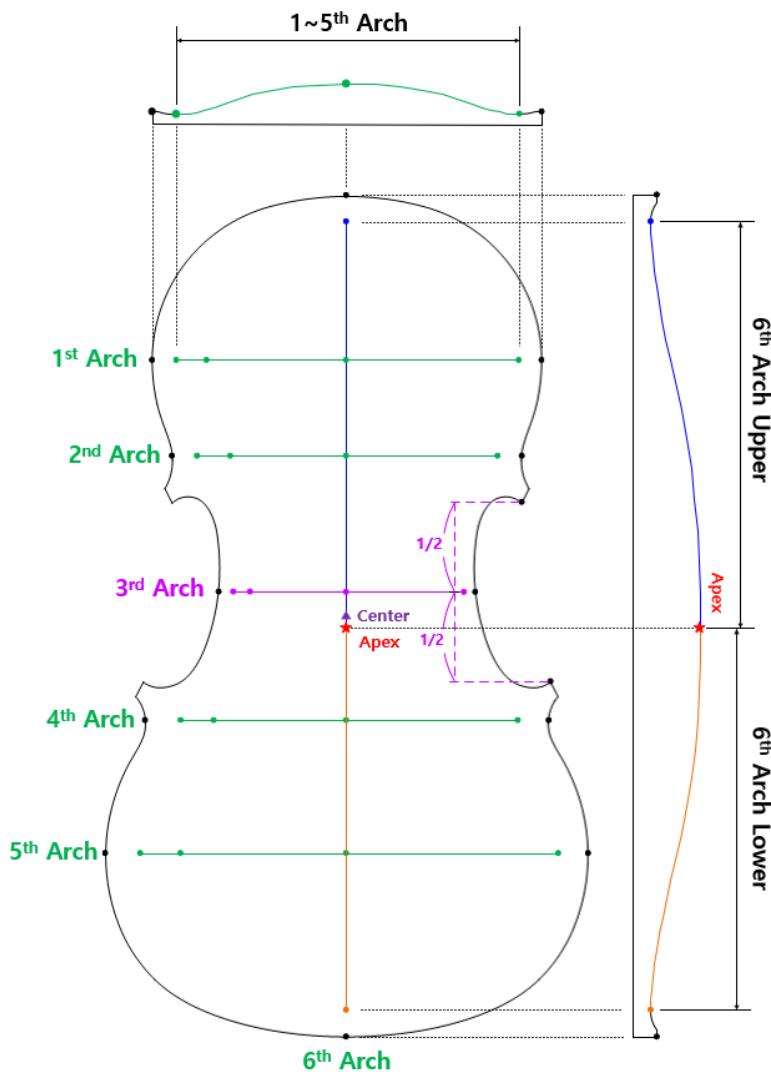


Figure 2: Definition of the 6 arches

Curva(arch)	Descrizione
1 <sup>a</sup> Curva(arch)	Una curva(arch) che corre trasversalmente attraverso la parte più larga del lobo superiore.
2 <sup>a</sup> Curva(arch)	Una curva(arch) che corre trasversalmente attraverso il punto più concavo della punta superiore.
3 <sup>a</sup> Curva(arch)	Una curva(arch) che corre trasversalmente attraverso il punto medio tra le punte superiore e inferiore.
4 <sup>a</sup> Curva(arch)	Una curva(arch) che corre trasversalmente attraverso il punto più concavo della punta inferiore.
5 <sup>a</sup> Curva(arch)	Una curva(arch) che corre trasversalmente attraverso la parte più larga del lobo inferiore.
6 <sup>a</sup> Curva(arch) Superiore	La parte superiore della curva(arch) longitudinale che corre lungo il centro della tavola, rispetto all'apice.
6 <sup>a</sup> Curva(arch) Inferiore	La parte inferiore della curva(arch) longitudinale che corre lungo il centro della tavola, rispetto all'apice.

Table 1: Definition of the 6 arches

## 2 Modelli Oggetto della Ricostruzione

Questo rapporto utilizza un totale di quattro strumenti come modelli per la ricostruzione: due violini (Modelli A, D), una viola (B) e un violoncello (C). Poiché sono necessarie specifiche precise per ricostruire le curve(arch), questo rapporto esegue una modellazione per estrarre le dimensioni di ogni strumento. I disegni e i dati numerici dei materiali di origine sono utilizzati il più possibile, e le informazioni mancanti vengono estratte direttamente dai disegni. Un punto importante è che le curve(arch) sinistra e destra spesso differiscono nella forma a causa della deformazione delle tavole nel tempo.

### 2.1 Modelli A, B e C

I Modelli A, B e C sono il violino, la viola e il violoncello presentati nel libro di Simone F. Sacconi, «I Segreti di Stradivari» (pp. 63-83). Questa fonte fornisce dati dettagliati, incluse le linee di contorno, sia in forma grafica che numerica, rendendola un eccellente riferimento per la ricostruzione.

Tuttavia, il libro non specifica a quali strumenti reali corrispondano questi tre modelli. Sulla base del contenuto del libro e dell'analisi di altri ricercatori, si presume che il Modello A sia basato sul «Messia (1716)» o sul «Betts (1704)», il Modello B sul «Toscano-Medici (1690)», e il Modello C sul «Gore-Booth (1710)» o sul «Piatti (1720)». Si ritiene inoltre che questi modelli incorporino le caratteristiche medie di altri strumenti dell'epoca.

Il metodo e la procedura di modellazione sono i seguenti:

1. Scansionare le immagini complete delle linee di contorno dal materiale di origine<sup>3</sup> e scalarle in base alla lunghezza longitudinale della tavola.
2. Dall'immagine scalata, determinare la larghezza della tavola in corrispondenza di ciascuna curva(arch).
3. Riscalare le immagini dettagliate delle curve(arch) per farle corrispondere alle larghezze misurate.
4. Sulle immagini dettagliate delle curve(arch), disegnare linee verticali corrispondenti alla posizione e all'altezza delle linee di contorno.
5. Collegare gli estremi delle linee verticali con una curva spline. La spline è impostata in modo che la pendenza della tangente sia 0 all'apice e ad entrambi gli estremi della curva(arch).

Le Figure dalla 3 alla 8 mostrano le curve(arch) dei tre modelli creati utilizzando il metodo sopra descritto. Le linee rosse rappresentano le curve(arch) oggetto della ricostruzione, e i numeri sopra le curve(arch) indicano l'altezza in ogni punto.

La sfida più grande nella modellazione di questi tre strumenti è l'incoerenza tra i dati numerici e i disegni nel materiale di origine. Seguendo rigorosamente i dati numerici si ottiene una curva con una superficie irregolare. D'altra parte, ricalcando le curve dai disegni si ottiene una bombatura liscia, ma le altezze differiscono completamente dai valori dei dati. Quest'ultimo metodo presenta un problema ancora più grande: quando le curve(arch) vengono combinate per creare le linee di contorno generali, il risultato è completamente diverso dalle linee di

<sup>3</sup>SIMONE F. SACCONI, «I Segreti di Stradivari», p.63 ~ p.83

contorno nella fonte originale. Pertanto, questo rapporto ha adottato il primo metodo, dando priorità ai dati numerici.

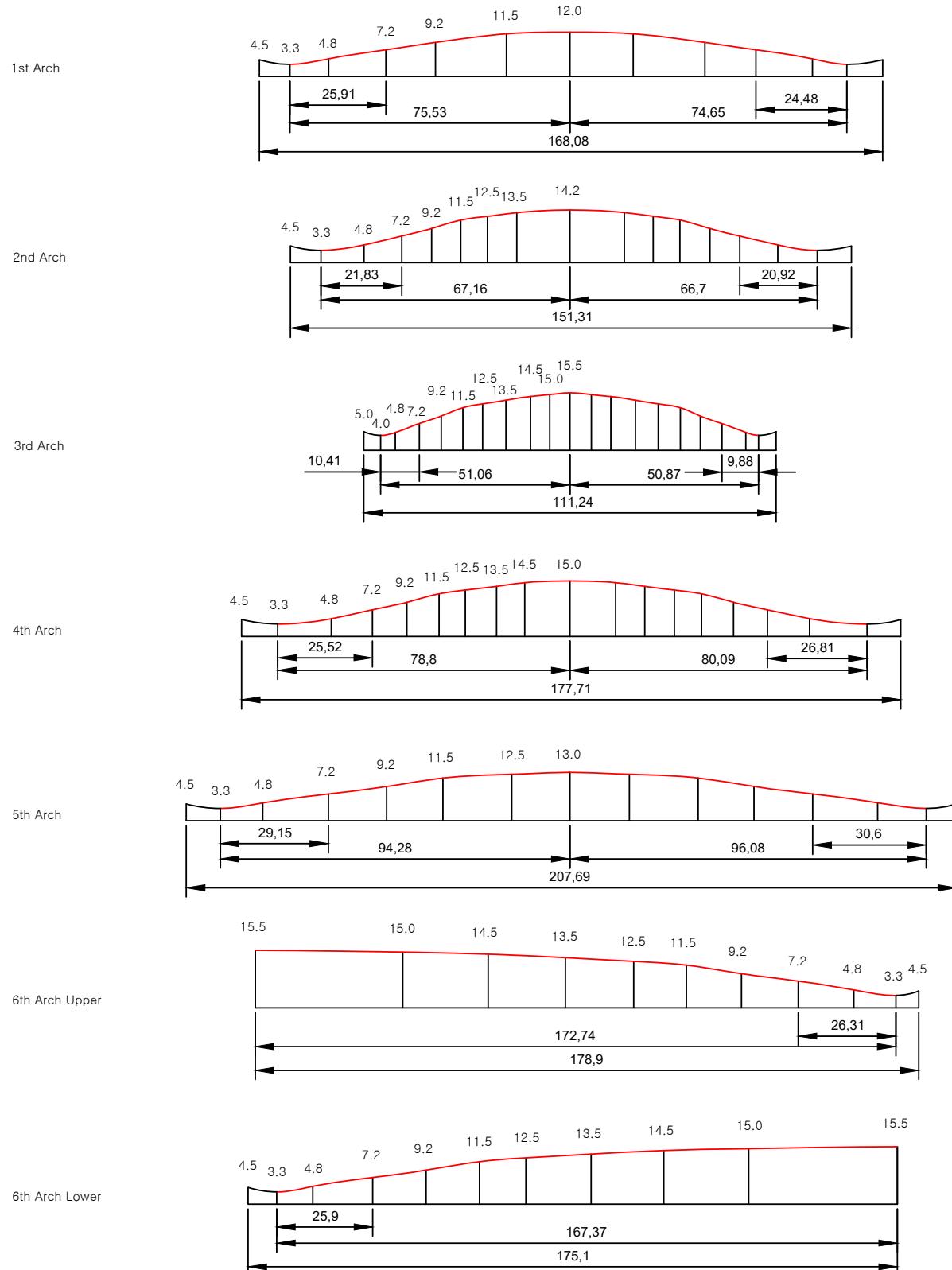


Figure 3: Model A, Violin Front

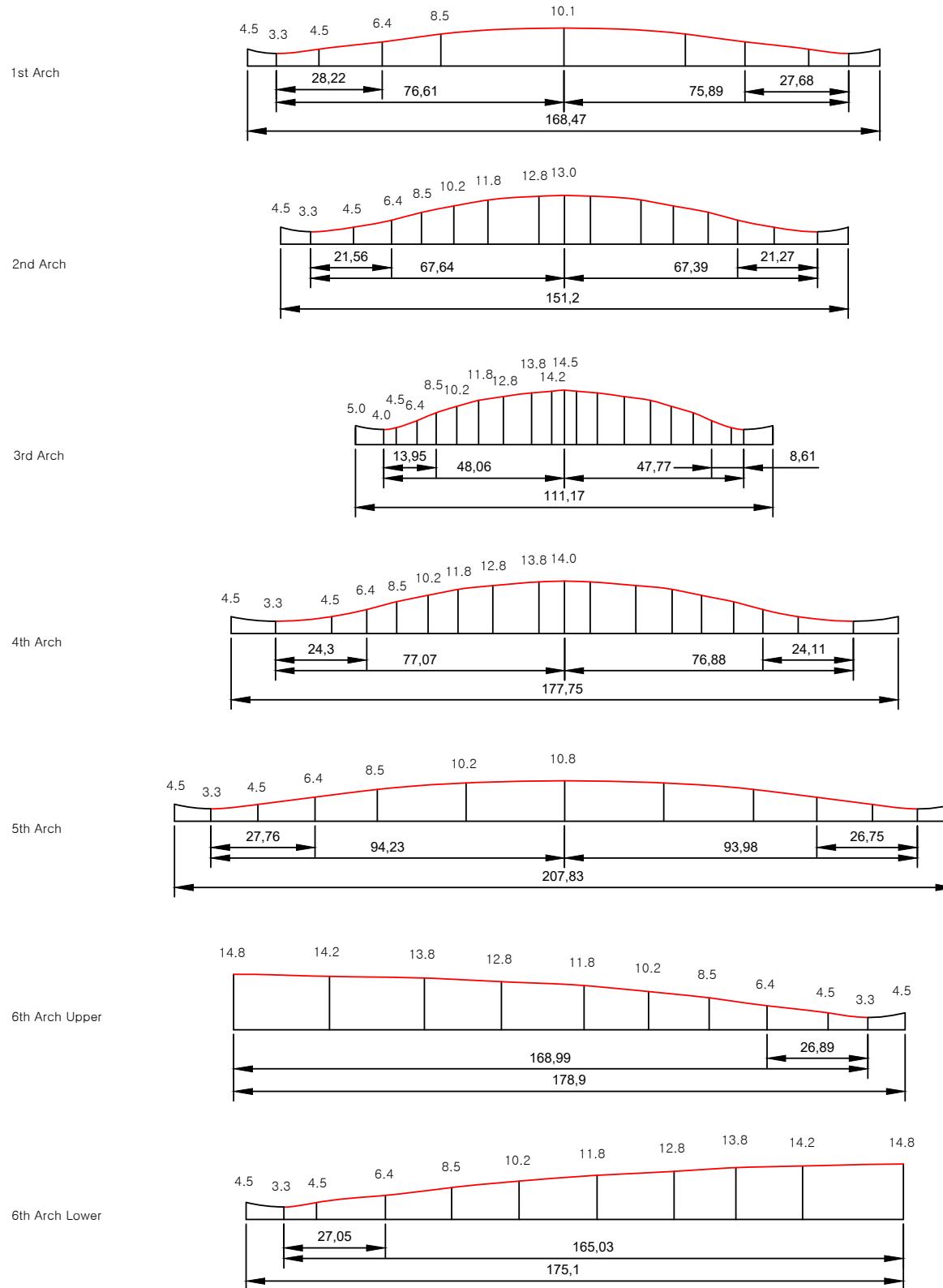
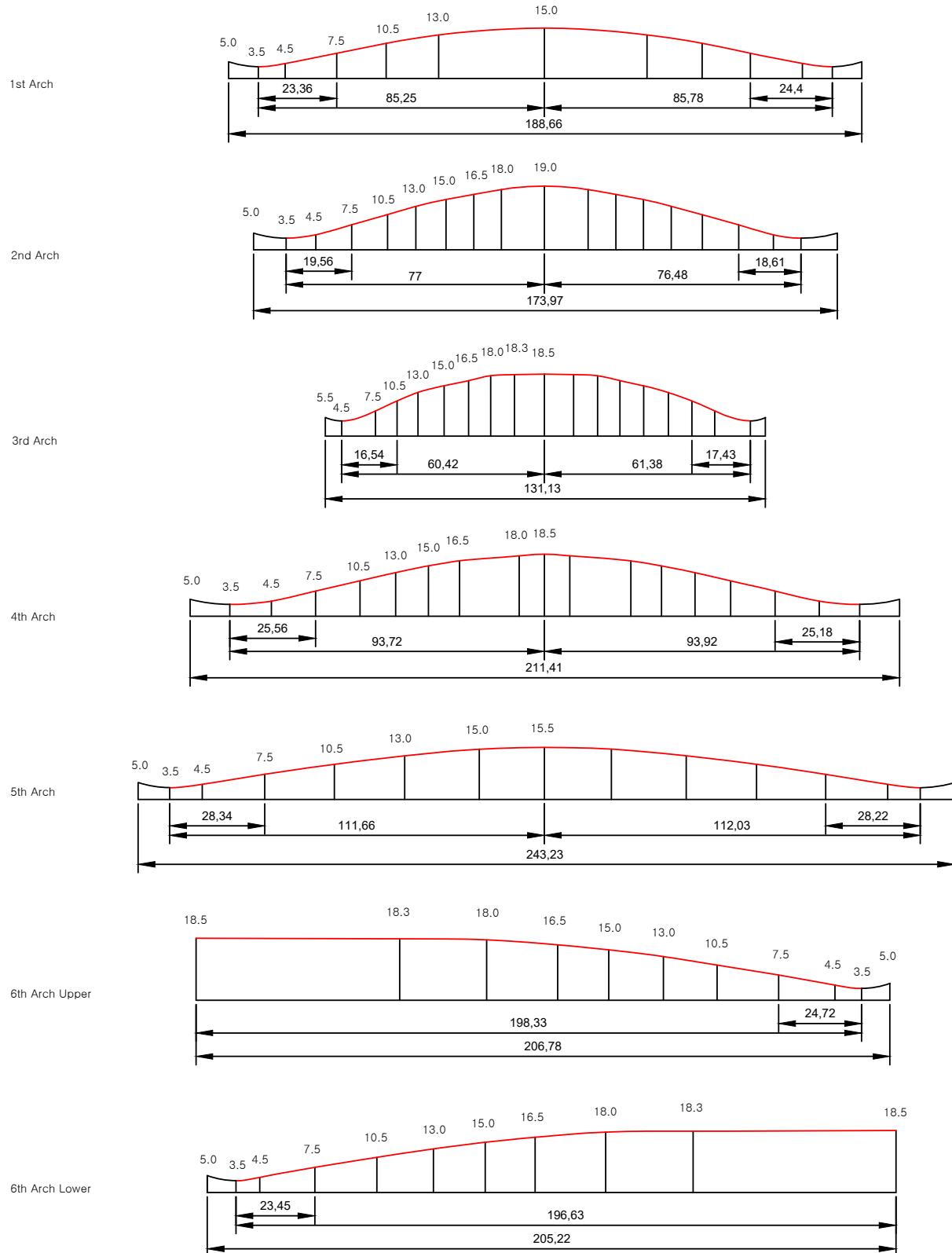


Figure 4: Model A, Violin Back



**Figure 5: Model B, Viola Front**

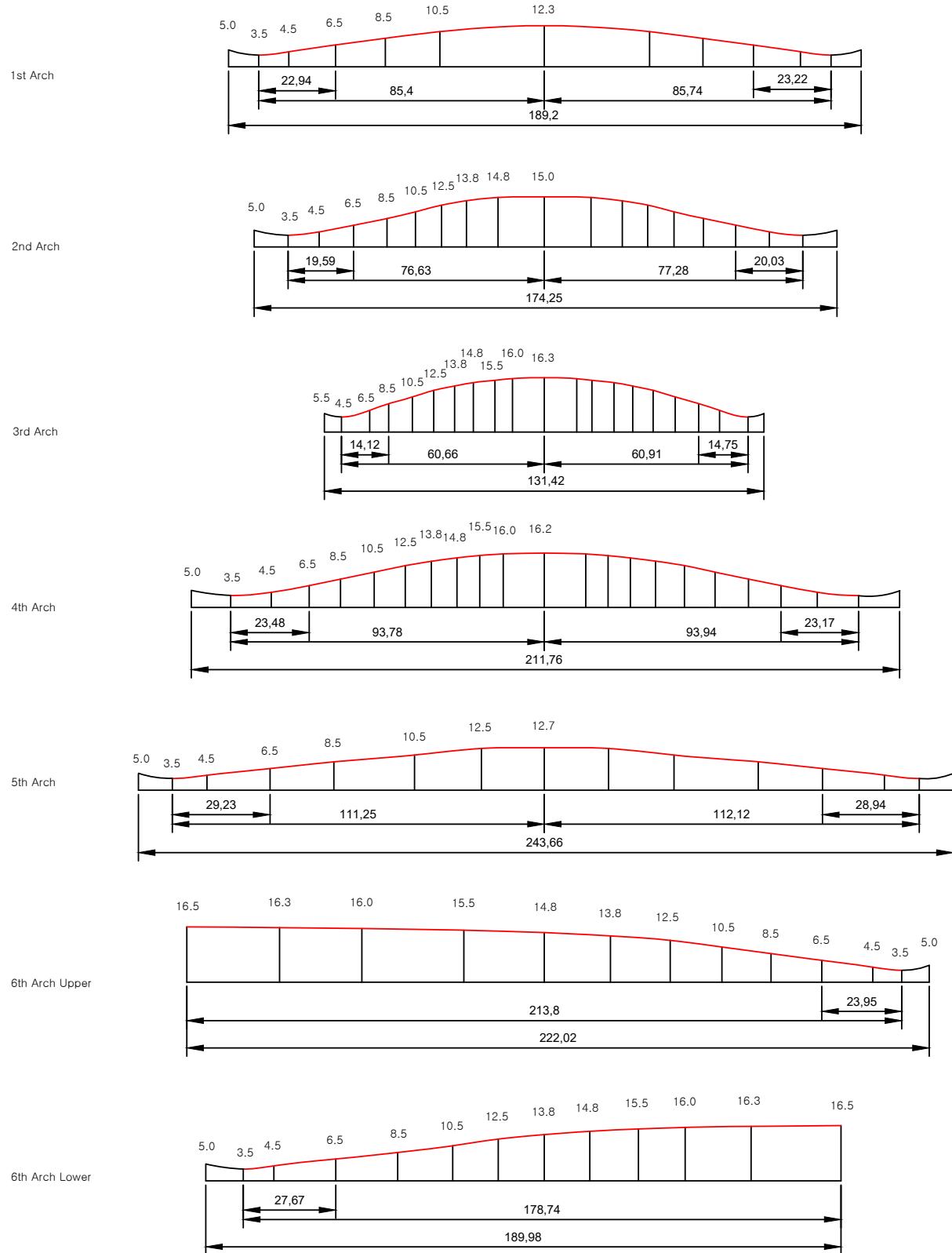


Figure 6: Model B, Viola Back

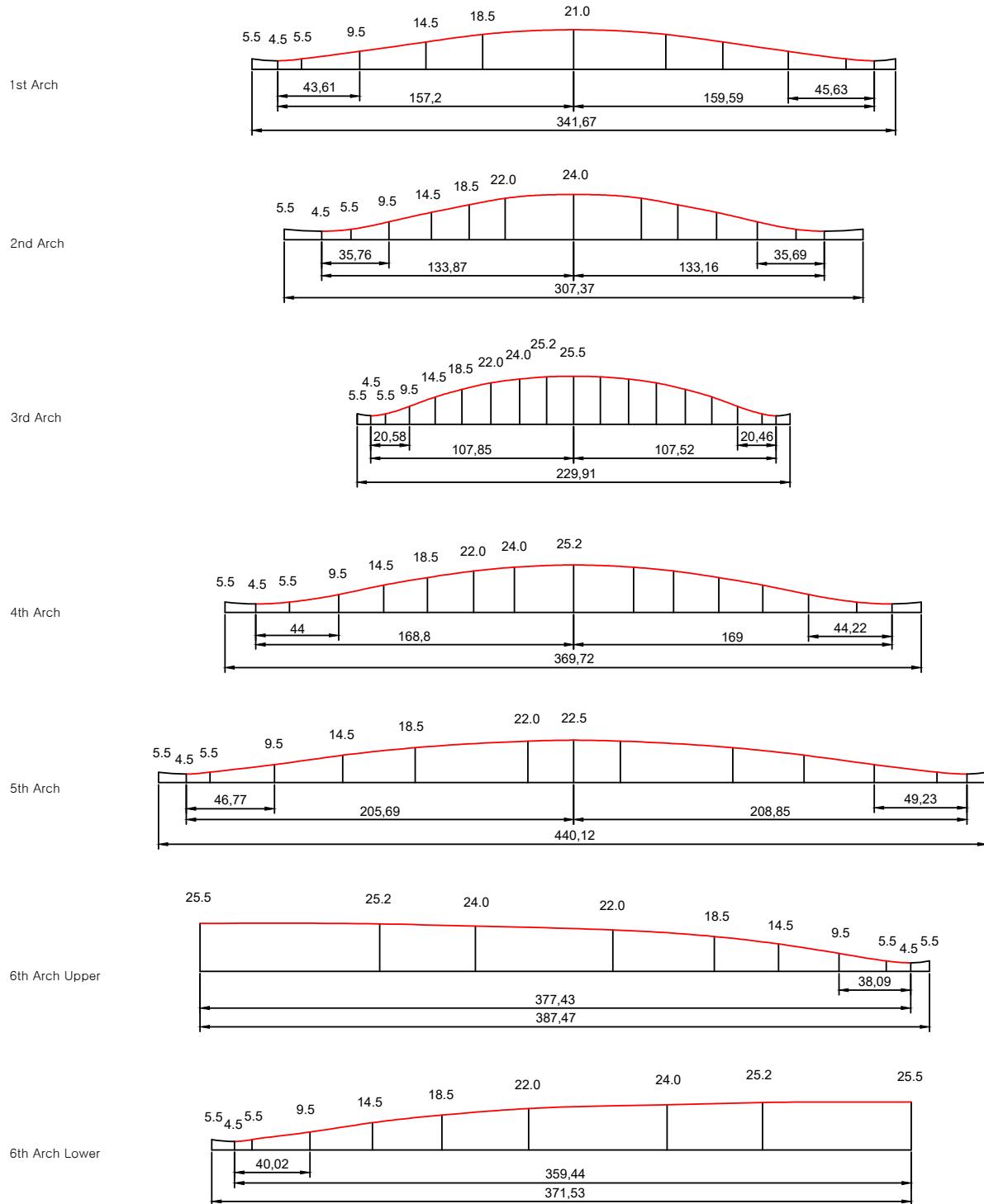


Figure 7: Model C, Cello Front

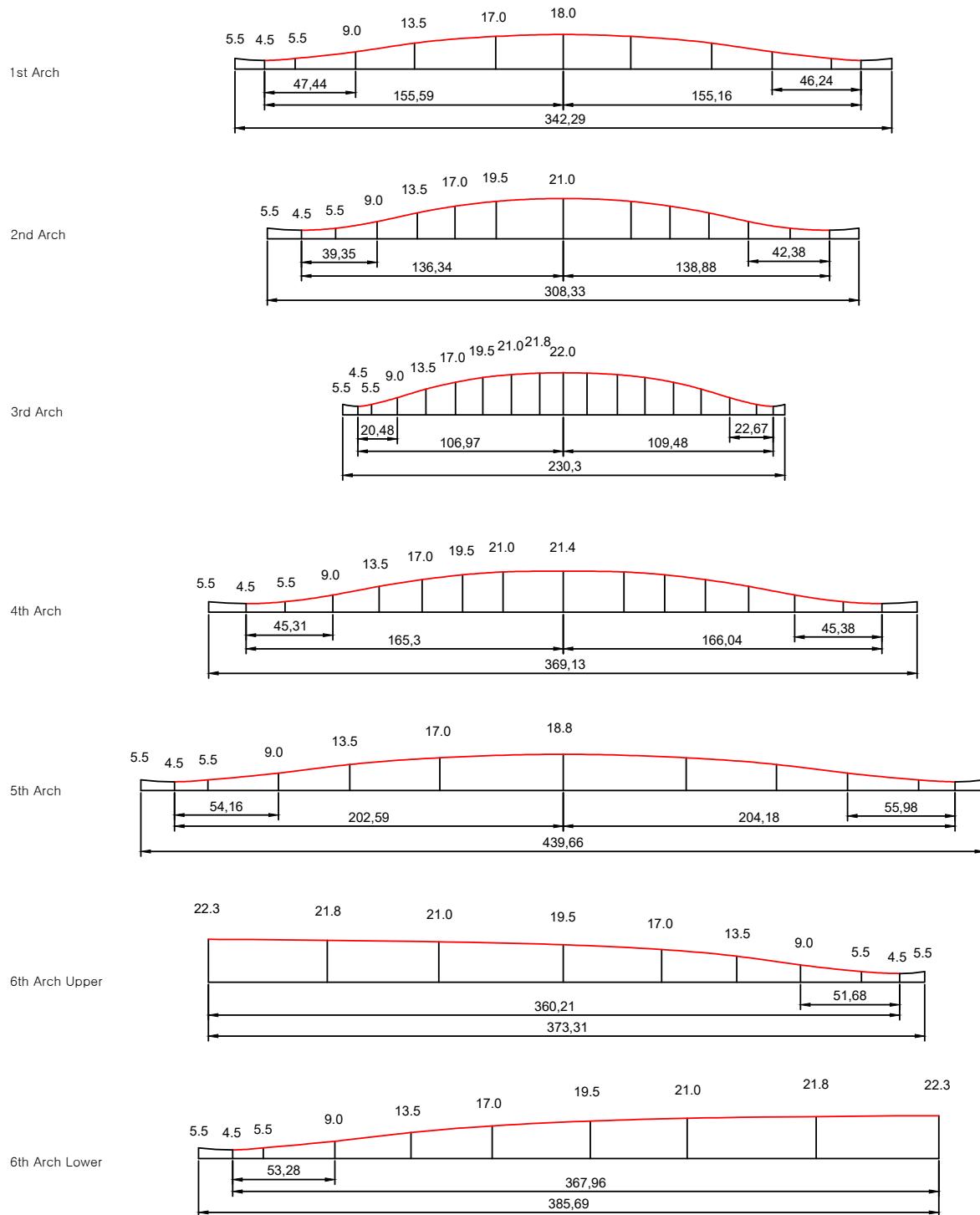


Figure 8: Model C, Cello Back

## 2.2 Modello D

Il Modello D è il violino «Tiziano» (Antonio Stradivari, 1715). Per la ricostruzione, questo rapporto utilizza i dati del poster (valori numerici e immagini delle curve(arch)) di The Strad. A differenza dei Modelli A, B e C, questi dati sono stati ottenuti utilizzando la moderna tecnologia di scansione TC, quindi ci si può aspettare una forma della bombatura più accurata. Tuttavia, poiché non ci sono dati sulle linee di contorno, i contorni devono essere estratti direttamente dalle immagini. Il metodo di modellazione che utilizza il poster è il seguente:

1. Scansionare le immagini delle curve(arch) dal poster.
2. Regolare la scala delle immagini scansionate in modo che le larghezze delle curve(arch) corrispondano ai dati numerici.
3. Estrarre le curve(arch) dalle immagini scalate utilizzando la funzione spline di un programma CAD.
4. Dividere uniformemente gli intervalli di contorno in base alla larghezza della 3<sup>a</sup> curva(arch), e quindi estrarre l'altezza in ogni punto.
5. In base ai valori di altezza del contorno ottenuti al punto 4, individuare e segnare le posizioni del contorno per le curve(arch) rimanenti.

Per estrarre le curve(arch) dalle immagini, questo rapporto ha utilizzato un programma CAD, ingrandendo l'immagine fino a quando le linee non erano sufficientemente spesse e creando poi una spline che passasse attraverso il centro delle linee. Per estrarre i contorni dalla 3<sup>a</sup> curva(arch), la larghezza della 3<sup>a</sup> curva(arch) è stata divisa in 17 parti uguali, impostando i punti dispari a partire dagli estremi della curva(arch) come posizioni del contorno. Cioè, i punti di divisione 1°, 3°, 5°, ..., 15° sono impostati come posizioni del contorno, consentendo la creazione di otto linee di contorno.

Le Figure 9 e 10 mostrano il Modello D completato. Questo modello presenta diversi problemi. Primo, sebbene la bombatura sia liscia, è altamente asimmetrica. Il lato dell'anima, in particolare, sporge in modo significativo. Secondo, la parte centrale della 6<sup>a</sup> curva(arch) sulla tavola è più bassa rispetto alle aree circostanti, rendendo difficile individuare l'apice. La posizione dell'apice è essenziale per la ricostruzione della curva(arch). Pertanto, è stata apportata una correzione minima di circa 0.01mm per sollevare l'area vicino al ponticello. Per questo motivo, la posizione dell'apice della 6<sup>a</sup> curva(arch) sulla tavola potrebbe non essere precisa. Terzo, l'apice della 6<sup>a</sup> curva(arch) è più basso dell'apice della 3<sup>a</sup> curva(arch), il che sembra essere un errore del processo di produzione del poster. Infine, le larghezze dei bordi superiore e inferiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) sul fondo sono molto strette. Ad eccezione della correzione apportata all'apice della 6<sup>a</sup> curva(arch) sulla tavola, i restanti problemi sono stati lasciati invariati, utilizzando la forma del materiale di origine senza alterazioni.

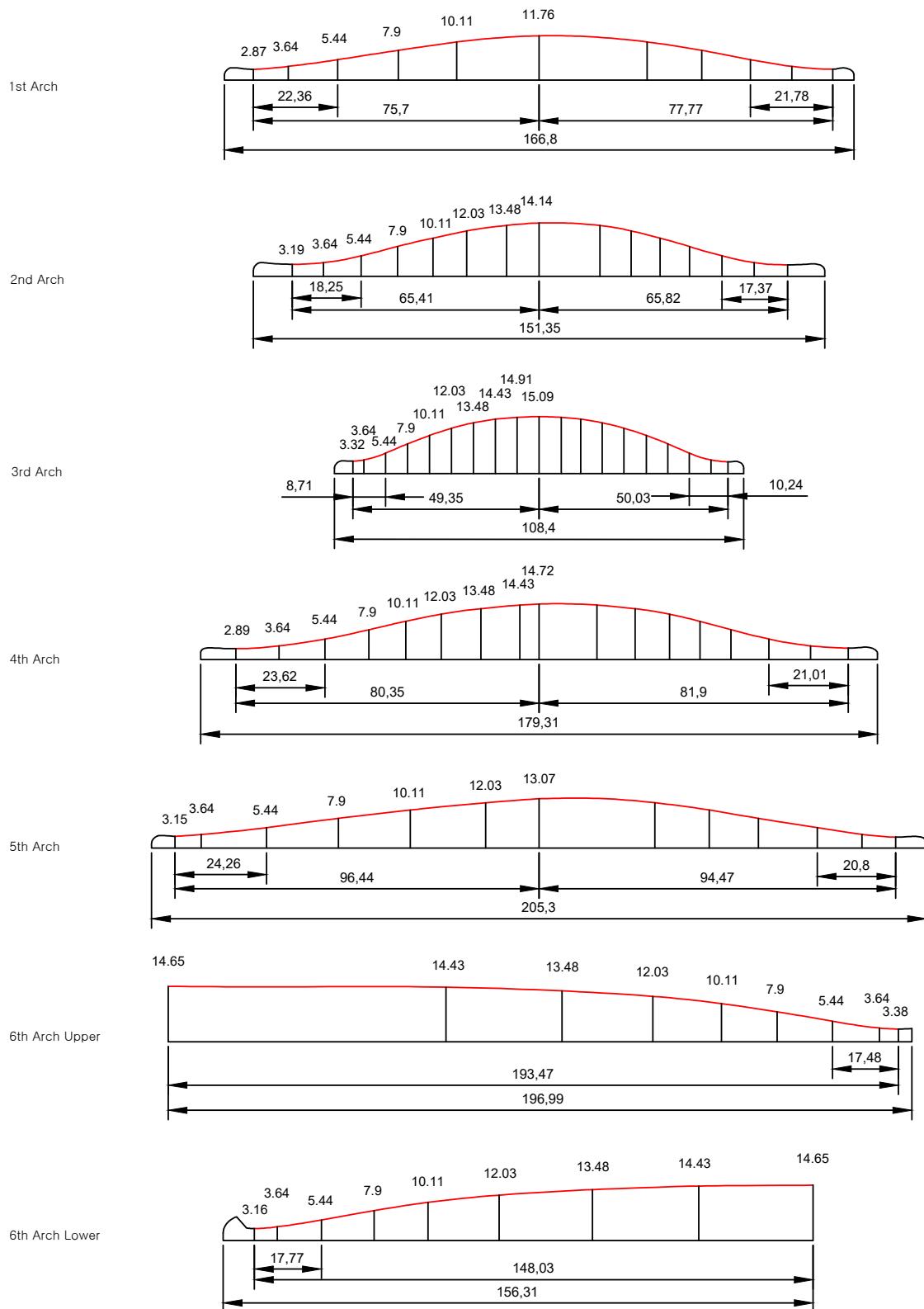


Figure 9: Model D, Titian Front

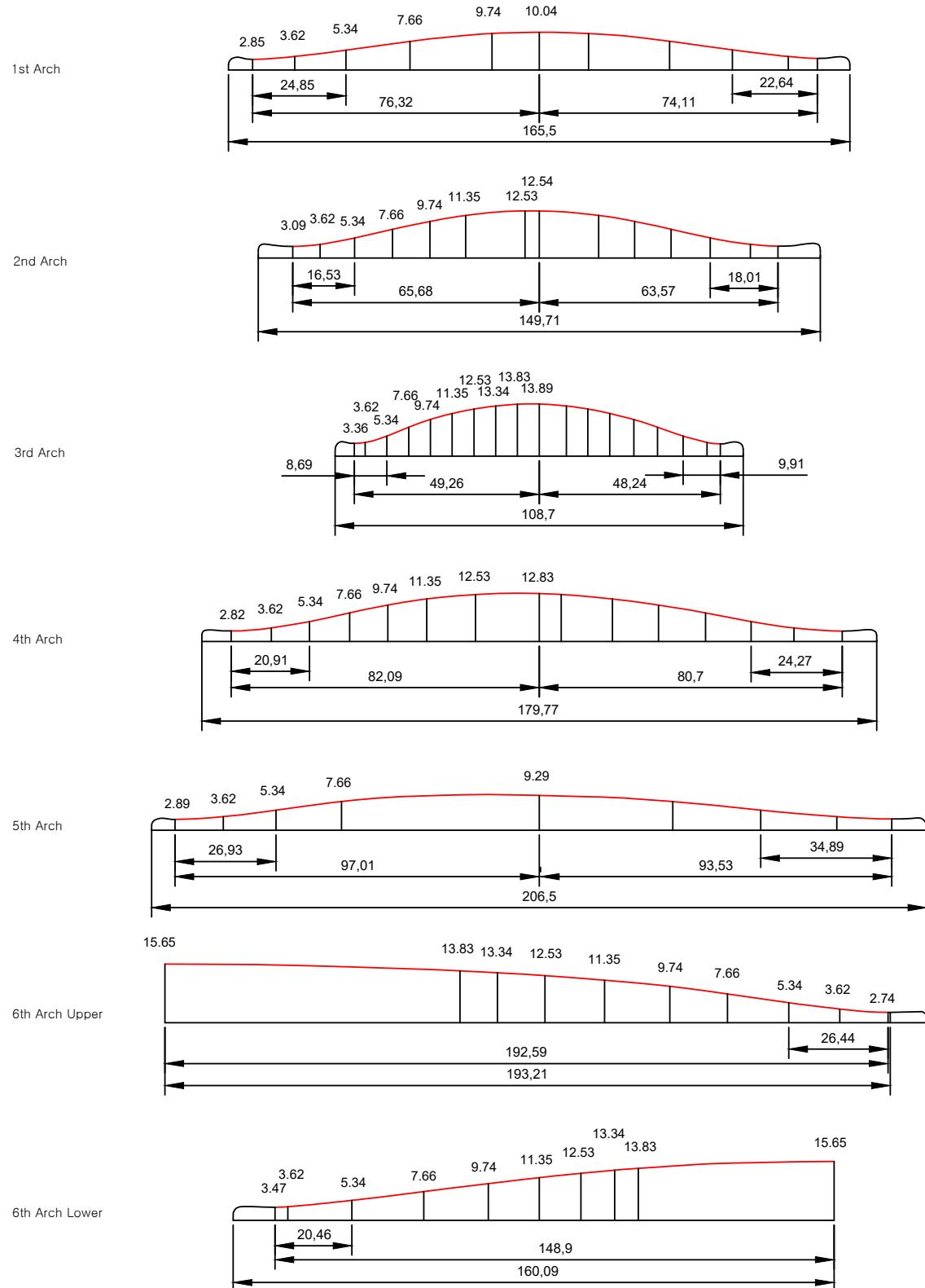


Figure 10: Model D, Titian Back

### 3 Trocoide

La Trocoide Accorciata (CTD), nota per essere la curva più simile alla bombatura di Stradivari, è un tipo di trocoide (TD). Le trocoidi si dividono in varie curve a seconda del loro principio di generazione. Questo capitolo esaminerà le definizioni e le caratteristiche di ogni tipo di TD e spiegherà i problemi della CTD e le loro soluzioni.

#### 3.1 Definizione e Tipi di Trocoide

##### Definition 3.1. Trocoide (TD)

*La traiettoria tracciata da un punto  $P$ , a una distanza  $d$  dal centro del cerchio  $A$  con raggio  $r$ , mentre il cerchio  $A$  rotola senza slittare lungo una linea retta, o lungo l'interno (tangente interna) o l'esterno (tangente esterna) di un altro cerchio  $B$  con raggio  $R$ .*

Secondo la Definizione 3.1, le TD sono classificate in nove tipi di curve, come mostrato nella tabella seguente.

Type	Name	Base	$d, r$	$r, R$	Shape
Basic Trochoid	Curtate Trochoid	Line	$d < r$	.	Wavy
	Cycloid	Line	$d = r$	.	Pointed
	Prolate Trochoid	Line	$d > r$	.	Looped
Hypotrochoid	Curtate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Hypocycloid	Circle (inscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Hypotrochoid	Circle (inscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped
Epitrochoid	Curtate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d < r$	$r < R$	Wavy
	Epicycloid	Circle (circumscribed)	$d = r$	$r < R$	Pointed Looped
	Prolate Epitrochoid	Circle (circumscribed)	$d > r$	$r < R$	Looped

**Table 2:** Types of Trochoid curves.  $r$ :radius of circle  $A$ ,  $R$ :radius of circle  $B$ ,  $d$ :distance from the center of circle  $A$  to the tracing point  $P$ . Wavy:violin arch shape, Loopied:shape of  $\alpha$  rotated 90 degrees.

Le Trocoidi sono ampiamente divise in tre tipi. Il primo, «Trocoide», si forma quando un cerchio rotola lungo una linea retta. Il secondo, «Ipotrocoide», si verifica quando un piccolo cerchio rotola all'interno di un cerchio più grande. Il terzo, «Epitrocoide», è quando un piccolo cerchio rotola all'esterno di un cerchio più grande. Inoltre, si usa il nome «Accorciata (Curtate)» quando  $d < r$ , «Cicloide (Cycloid)» quando  $d = r$ , e «Allungata (Prolate)» quando  $d > r$ . Il prefisso «Ipo (Hypo)» significa rotolamento interno, e «Epi» significa rotolamento esterno.

Un aspetto peculiare della terminologia TD è che quando  $d = r$ , si usa il termine «Cicloide» invece di «Trocoide». Inoltre, poiché  $r > R$  non è valido per definizione, tali curve non sono chiamate trocoidi. Pertanto, il termine

«Cicloide Accorciata (Curtate Cycloid)», che è convenzionalmente usato in alcune letterature, non è matematicamente raccomandato; «Trocoide Accorciata (Curtate Trochoid)» è l'espressione più appropriata.

Nella prossima sezione, questo rapporto esaminerà la Trocoide Accorciata in maggior dettaglio.

## 3.2 Trocoide Accorciata

Qui, questo rapporto indagherà su cosa sia una curva CTD e identificherà i suoi problemi confrontandola con i modelli.

### 3.2.1 Definizione di Trocoide Accorciata

Una CTD è definita come segue.

#### Definition 3.2. Trocoide Accorciata (CTD)

*La traiettoria tracciata da un punto P, situato a una distanza d dal centro del cerchio A con raggio r; mentre il cerchio A rotola senza slittare lungo una linea retta. (dove d < r)*

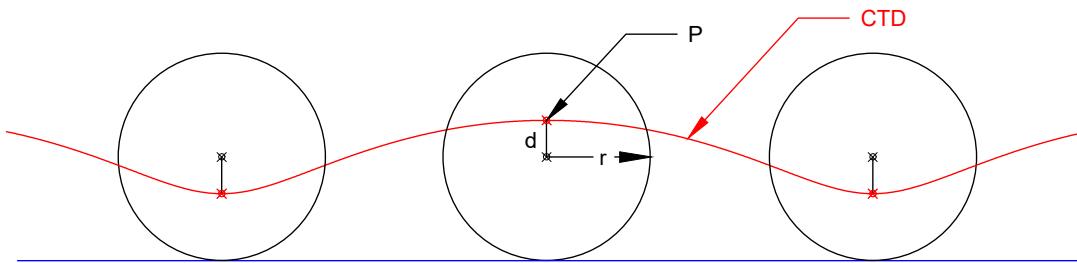


Figure 11: Curtate Trochoid

La CTD ha una struttura in cui lo stesso motivo di curva si ripete. In questa curva, il punto più alto raggiunto dal punto P diventa l'apice della curva(arch). Gli estremi della curva(arch) si formano quando il cerchio compie mezzo giro a sinistra e a destra dall'apice, portando il punto P nella sua posizione più bassa.

Una CTD può essere espressa matematicamente come segue:

$$\begin{cases} x = r\theta - d \sin(\theta) \\ y = r - d \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

$r$  : raggio del cerchio rotante (ruota)

$d$  : distanza dal centro del cerchio al punto P (dove  $d < r$ )

$\theta$  : angolo di rotazione del cerchio

Nella Figura 11, la curva CTD ripete lo stesso motivo. Questo rapporto chiamerà un singolo segmento di questa curva, corrispondente a una curva(arch), una «Curva(arch) di Trocoide Accorciata» (Curtate Trochoid Arch, di seguito «CTDA»).

La larghezza  $W$  di una CTDA è uguale alla circonferenza del cerchio, e la sua altezza  $H$  è uguale al doppio della distanza  $d$ . Pertanto,

$$\begin{cases} W = 2\pi r \\ H = 2d \end{cases} \quad (2)$$

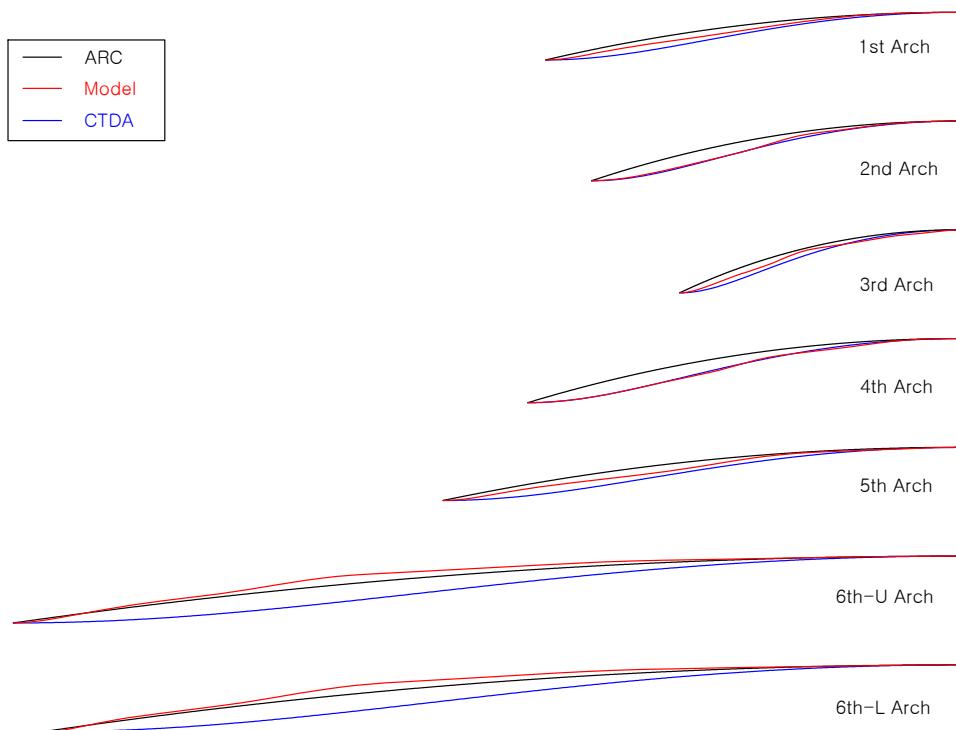
Per allargare la curva(arch), si può aumentare il raggio  $r$ , e per alzarla, si può aumentare  $d$ . Un fatto importante da notare qui è che una CTDA ha una sola forma possibile per una data larghezza e altezza, poiché nessun altro parametro può essere alterato. In altre parole,

La «pienezza» di una CTDA non può essere regolata.

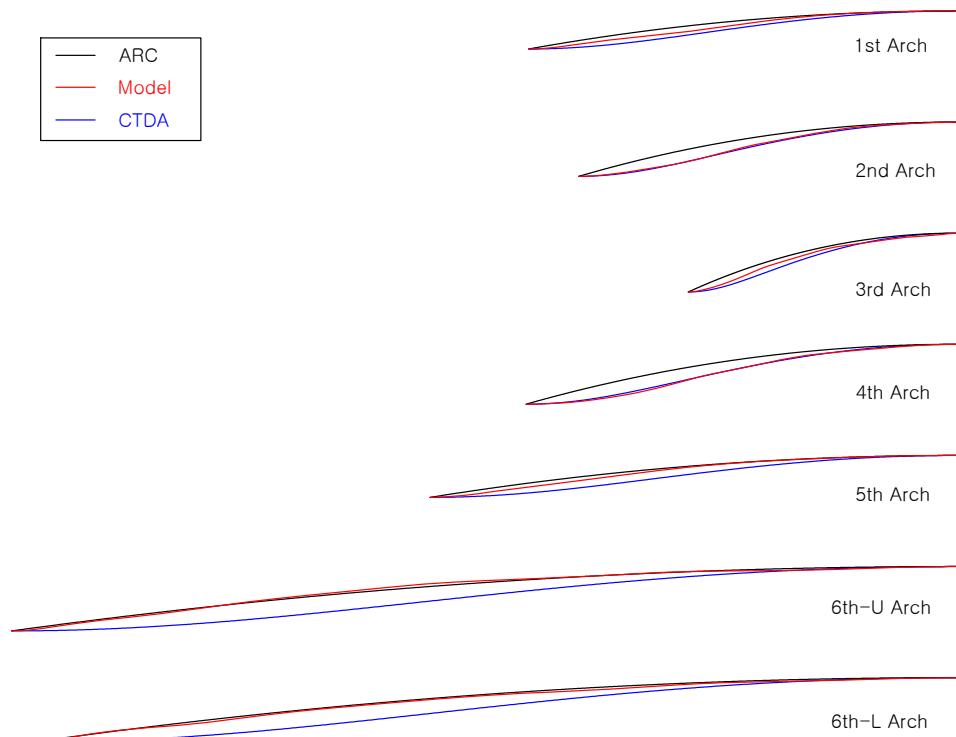
Questa è la ragione decisiva per cui è difficile usare una CTDA per ricreare la bombatura di Stradivari.

### 3.2.2 CTDA vs. Bombatura di Stradivari

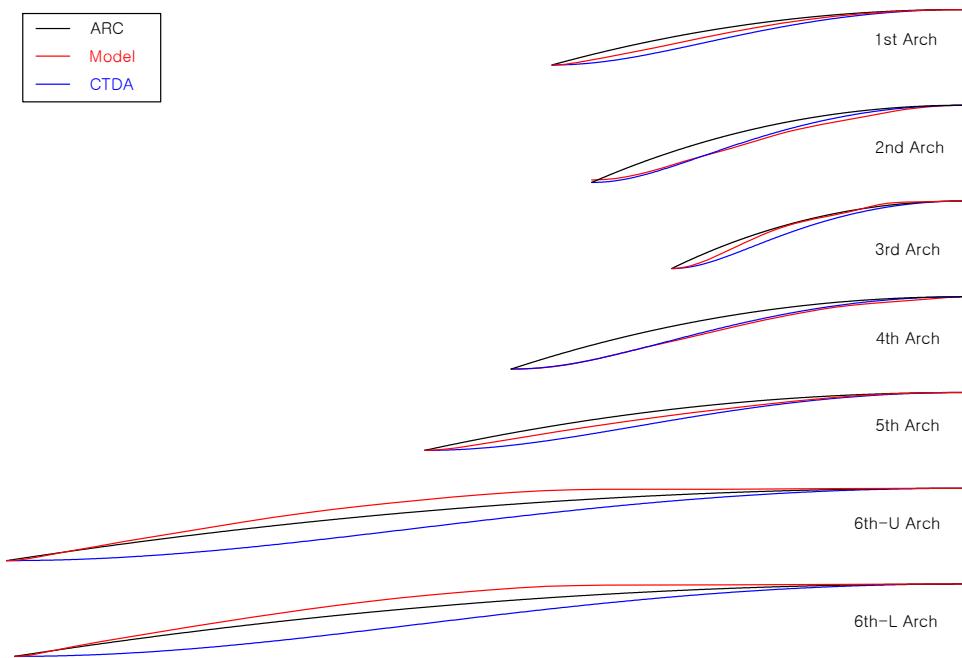
Questa sezione confronterà la CTDA con le curve(arch) dei modelli per identificare eventuali problemi. Le Figure dalla 12 alla 19 confrontano le curve(arch) della tavola e del fondo dei Modelli A, B, C e D con una CTDA e una curva(arch) di cerchio. Il confronto è fatto con la curva(arch) sinistra di ogni modello. Per la tavola, questo è il lato della catena, e per il fondo, è il lato dell'anima; per il violoncello, è il contrario. Nelle figure, la linea rossa rappresenta la curva(arch) del modello, la linea blu rappresenta la CTDA e la linea nera rappresenta la curva(arch) di cerchio.



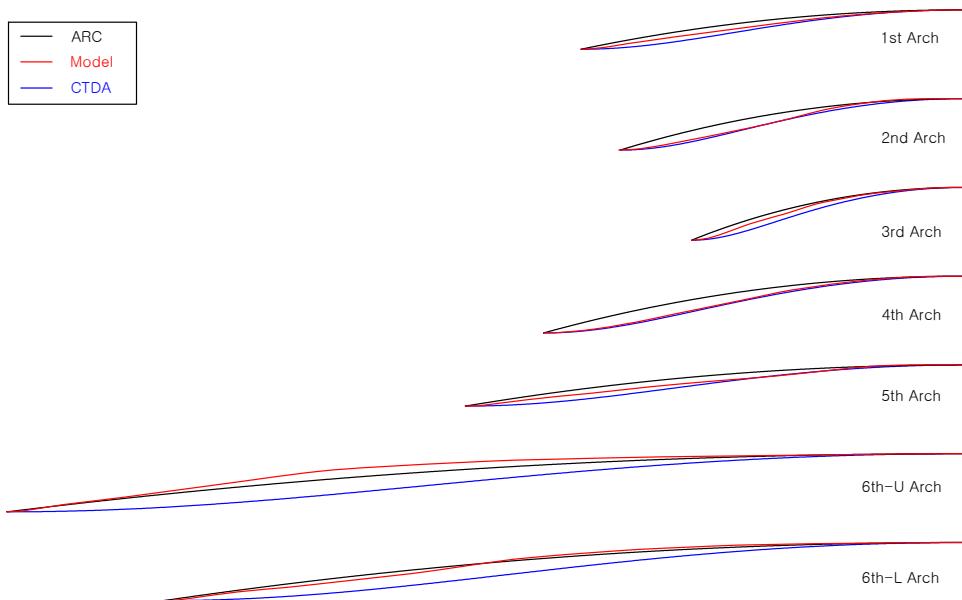
**Figure 12:** Model A, Violin Front (Bass bar side)



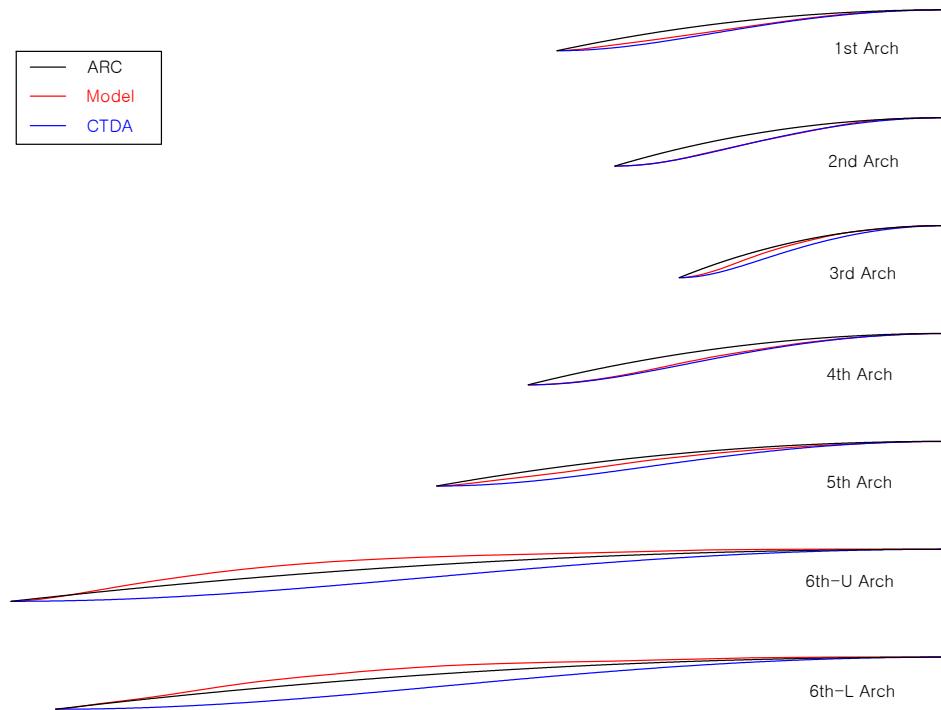
**Figure 13:** Model A, Violin Back (Sound post side)



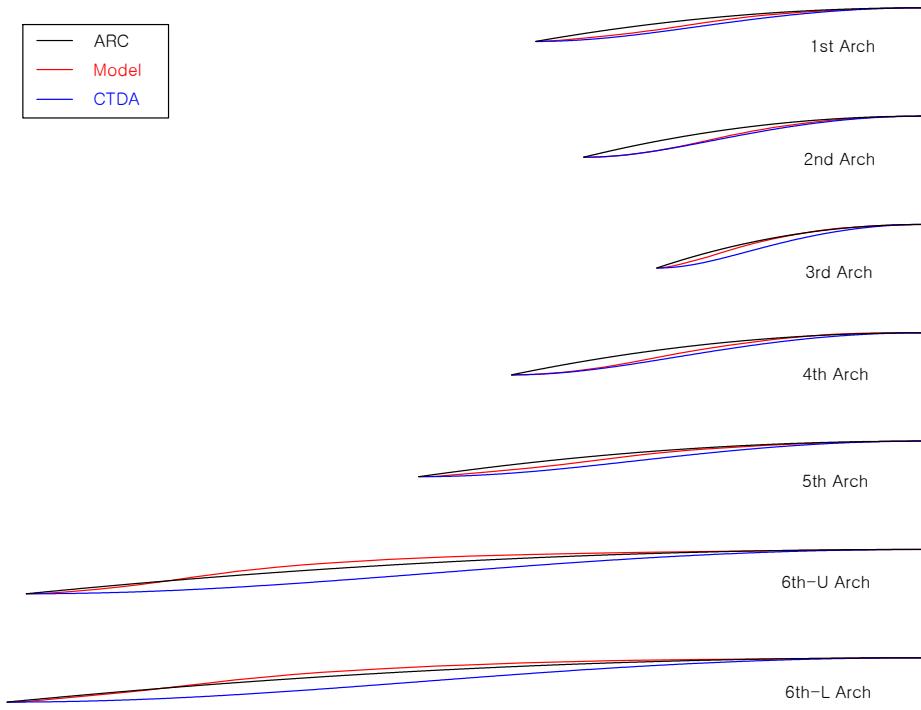
**Figure 14:** Model B, Viola Front (Bass bar side)



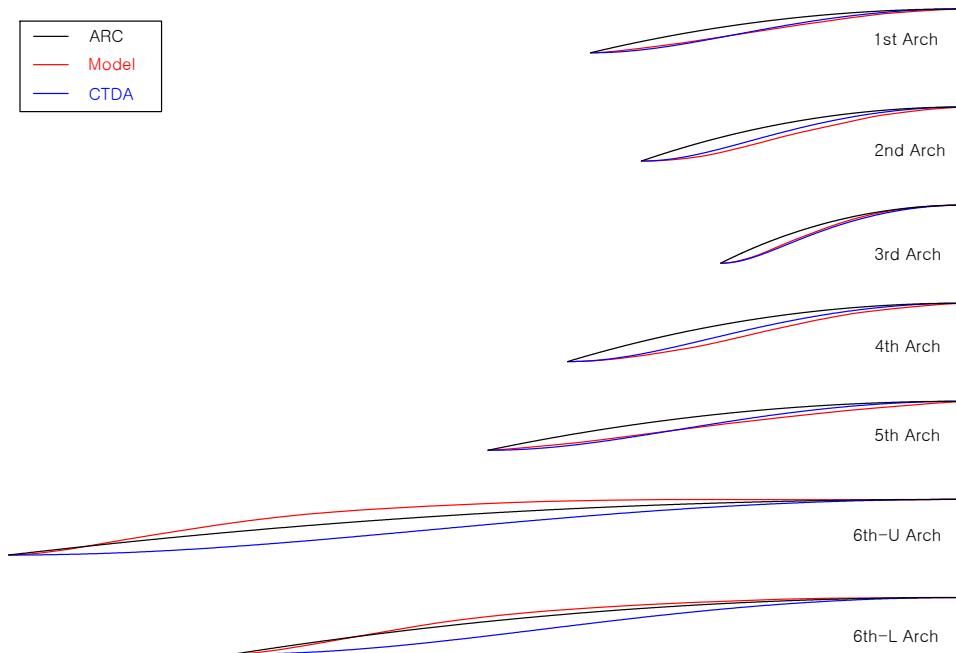
**Figure 15:** Model B, Viola Back (Sound post side)



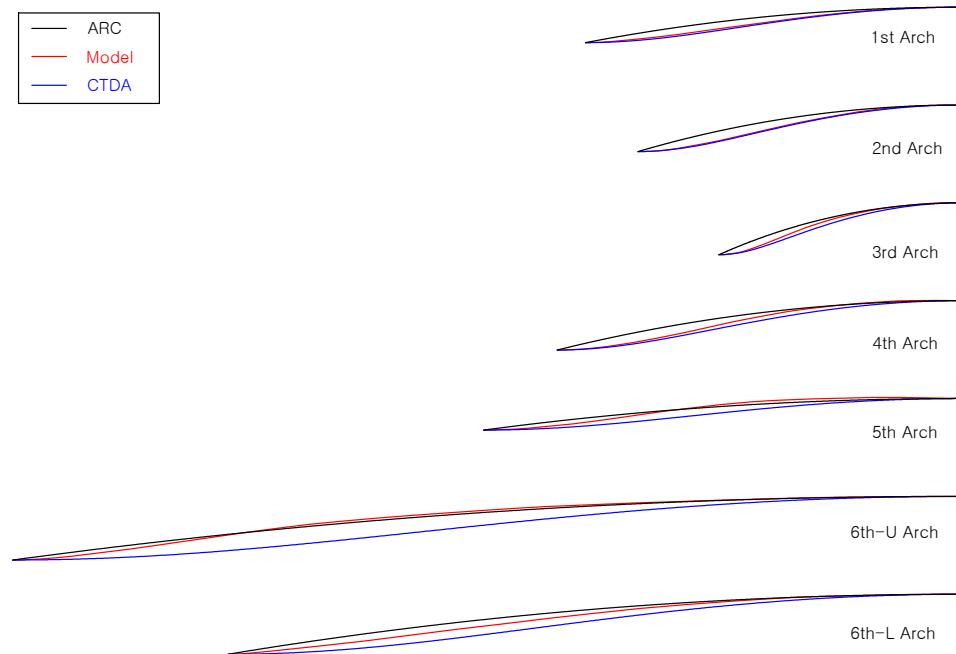
**Figure 16:** Model C, Cello Front (Sound post side)



**Figure 17:** Model C, Cello Back (Bass bar side)



**Figure 18:** Model D, Titian Front (Bass bar side)



**Figure 19:** Model D, Titian Back (Sound post side)

Un'analisi delle curve(arch) dei modelli dalle figure sopra rivela le seguenti caratteristiche:

- Curve(arch) 1, 3, 5: La loro forma è intermedia tra una curva(arch) di cerchio e una CTDA. Hanno una pienezza maggiore di una CTDA ma minore di una curva(arch) di cerchio.
- Curve(arch) 2, 4: Sono molto simili a una CTDA, con una pienezza comparabile.
- Curva(arch) 6: La tavola ha una pienezza maggiore di una curva(arch) di cerchio, mentre il fondo è simile o leggermente più pieno di una curva(arch) di cerchio.

Si può anche osservare che le curve(arch) 2 e 4 della tavola del Modello D (Tiziano) hanno una pienezza minore di una CTDA.

In sintesi, il CTDA generalmente manca di pienezza rispetto alla bombatura di Stradivari, sebbene per alcune curve(arch) sia simile o addirittura leggermente eccessiva. Ciò significa che il CTDA da solo non può replicare perfettamente la bombatura di Stradivari. Pertanto, per ricostruire la bombatura di Stradivari, giungiamo alla conclusione che:

si deve essere in grado di regolare la pienezza mantenendo costanti larghezza e altezza.

Per trovare la soluzione, torniamo alla definizione del CTDA.

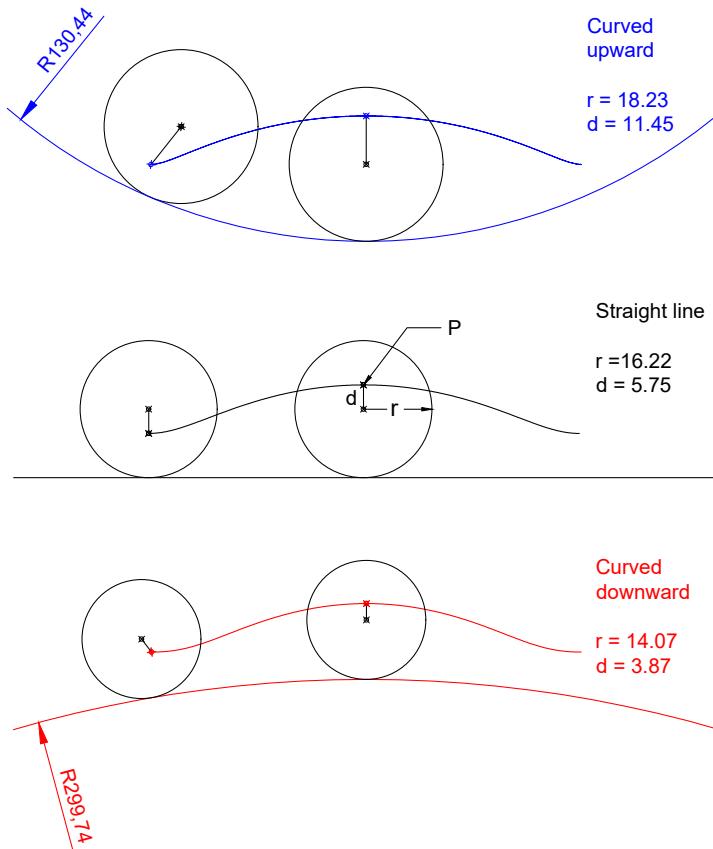
La definizione di un CTD include la condizione che «un cerchio rotola lungo una linea retta». Cosa accadrebbe se cambiassimo questa «linea retta» in una «linea curva»?

La Figura 20 mostra le curve(arch) create quando un cerchio rotola lungo una linea retta rispetto a una linea curva. Il caso superiore mostra un cerchio che rotola lungo una linea curva verso l'alto, quello centrale è una linea retta (CTDA), e quello inferiore è un cerchio che rotola lungo una linea curva verso il basso.

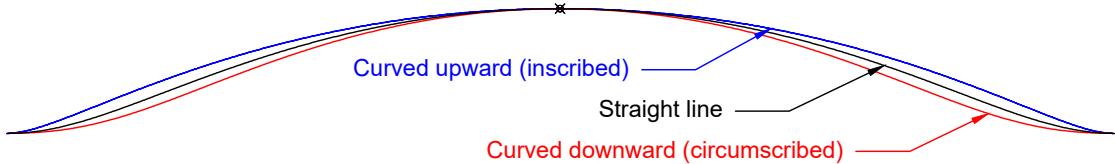
Più precisamente, il caso superiore è quando un cerchio rotola all'interno di un altro cerchio (inscritto), e il caso inferiore è quando rotola all'esterno (circoscritto). Per confrontare accuratamente la pienezza delle tre curve(arch), tutte le curve(arch) devono avere la stessa larghezza e altezza, quindi i valori dei parametri ( $R, r, d$ ) sono stati opportunamente regolati. La Figura 21 sottostante mostra le tre curve(arch) sovrapposte per un confronto più facile.

Le Figure 20 e 21 illustrano il concetto centrale di questo rapporto.

- La curva(arch) creata quando un cerchio rotola lungo una linea curva verso l'alto ha una pienezza maggiore di una CTDA.
- La curva(arch) creata quando un cerchio rotola lungo una linea curva verso il basso ha una pienezza minore di una CTDA.



**Figure 20:** Arches created by a circle rolling on a curve vs. a CTDA



**Figure 21:** Comparison of arches created by a circle rolling on a curve and a CTDA

Da questo, possiamo concludere che:

sostituendo la linea di base retta in un CTD con una linea curva, si può regolare la pienezza della curva(arch).

Qui, man mano che il raggio ( $R$ ) della linea curva (cerchio) verso l'alto/basso si avvicina all'infinito, diventa una linea retta, e la curva(arch) risultante diventa quasi identica a una CTDA. Al contrario, diminuendo il raggio, la pienezza aumenta per il rotolamento interno e diminuisce per il rotolamento esterno.

Come spiegato in precedenza nella Tabella 2, le curve generate quando un cerchio rotola su un altro cerchio sono l'ipotrocoide e l'epitrocoide. La curva(arch) blu nella figura è una «Ipotrocoide Accorciata» (Curtate Hypotrochoid, di seguito «CHT»), e la curva(arch) rossa è una «Epitrocoide Accorciata» (Curtate Epitrochoid, di seguito

«CET»). In altre parole, utilizzando CHT e CET, si può regolare liberamente la pienezza della curva(arch) mantenendo la sua larghezza e altezza. Tuttavia, per ottenere una curva a forma di bombatura, devono essere soddisfatte le condizioni  $d < r$  e  $r < R$ . Se  $d = r$ , le estremità diventano appuntite, violando le condizioni di base di una curva(arch). Se  $r > R$ , si produce una forma di curva completamente diversa.

### 3.3 Ipotrocoide Accorciata

#### 3.3.1 Definizione di Ipotrocoide Accorciata

Una CHT è definita come segue.

**Definition 3.3. Ipotrocoide Accorciata (CHT)**

*La traiettoria tracciata da un punto P, a una distanza d dal centro di un piccolo cerchio A con raggio r, mentre il cerchio A rotola senza slittare all'interno di un grande cerchio B con raggio R. (dove  $d < r, r < R$ )*

La differenza principale tra una CHT e una CTD è che il cerchio rotola all'interno di un altro cerchio, non su una linea retta.

La sua espressione matematica è la seguente:

$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r) \cos(\theta) + d \cdot \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R - r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (3)$$

$R$  : raggio del cerchio esterno B

$r$  : raggio del cerchio interno A (dove  $r < R$ )

$d$  : distanza dal centro del cerchio interno A al punto P (dove  $d < r$ )

$\theta$  : angolo di rotazione del cerchio interno

La Figura 22 è un esempio di una CHT. Una CHT è una curva continua creata mentre il piccolo cerchio ruota. Pertanto, per analizzare la larghezza, l'altezza e la pienezza di una curva(arch), è necessario estrarre un segmento da questa curva continua. Questo rapporto chiamerà la curva(arch) estratta da una CHT «CHTA (Curtate Hypotrochoid Arch)». Per estrarre la curva(arch) con precisione, è necessario conoscere le posizioni dell'apice e degli estremi, che sono definite come segue.

**Definition 3.4. Apice di una Ipotrocoide Accorciata**

*Un punto sulla traiettoria che è più vicino al centro del grande cerchio B.*

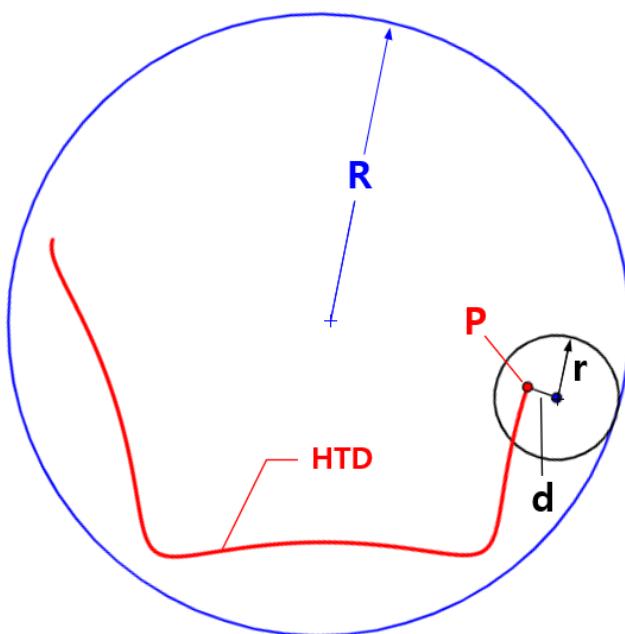


Figure 22: Hypotrochoid

### Definition 3.5. Estremi di una Ipotrocoide Accorciata

Due punti sulla traiettoria dove una linea perpendicolare alla linea che collega il centro del grande cerchio B e l'apice diventa tangente. Questi due punti sono situati simmetricamente rispetto all'apice.

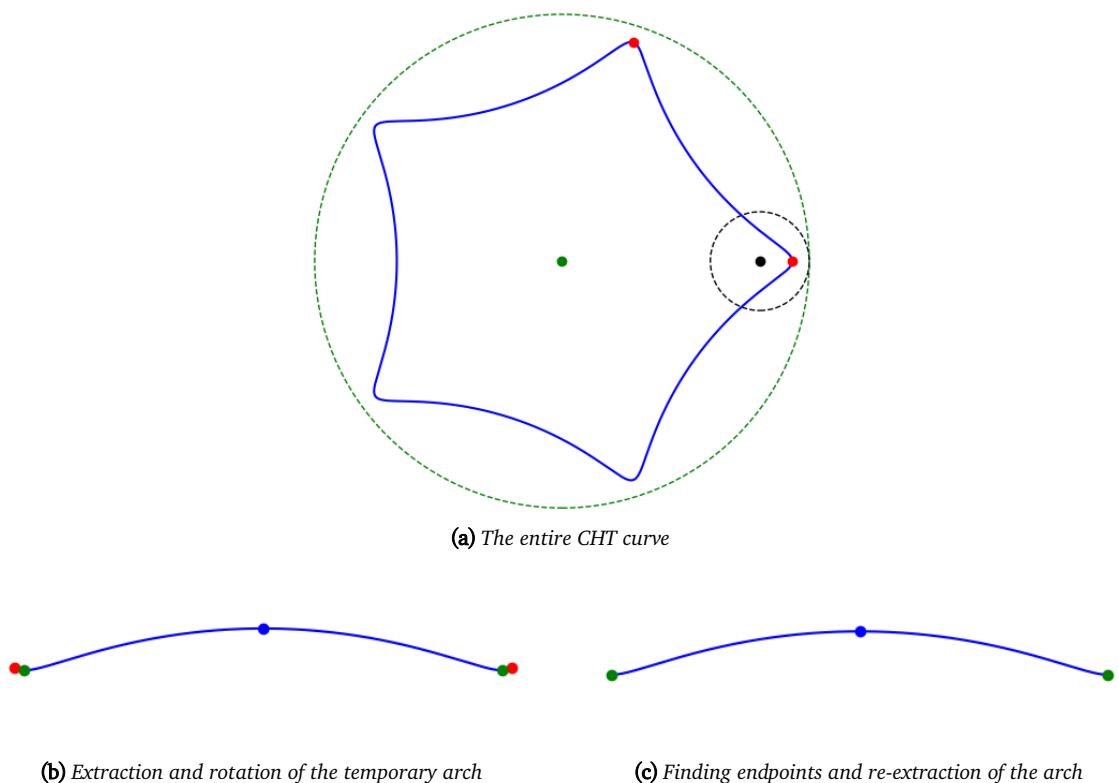
Trovare l'apice è semplice, ma trovare gli estremi è difficile. Questo perché una CHT ripete il suo motivo ruotando complessivamente, quindi è molto improbabile che il segmento di curva(arch) desiderato sia perfettamente orizzontale. Il metodo per estrarre una curva(arch) da una CHT è il seguente.

#### 3.3.2 Estrarre una Curva(arch) da una Ipotrocoide Accorciata

Una CHT è una curva con un motivo che si ripete. Per estrarre una curva(arch) da essa, l'apice e gli estremi devono essere localizzati con precisione. Il processo di estrazione è il seguente:

1. Disegnare la curva CHT. - Figura 23.(a) -
2. Tra i punti adiacenti, selezionare i due punti più lontani dal centro del grande cerchio B (punti rossi) come «estremi temporanei». - (a) -
3. Estrarre il segmento tra i due estremi temporanei per creare una «curva(arch) temporanea». - (b) -
4. Ruotare l'intera curva in modo che gli estremi della curva(arch) temporanea siano orizzontali. - (b) -
5. Sulla curva(arch) temporanea ruotata, trovare i punti in cui la pendenza della tangente è «0»; questi sono gli estremi effettivi della curva(arch) (punti verdi). - (b) -
6. Estrarre il segmento tra i due estremi effettivi identificati (punti verdi) come curva(arch) finale. - (c) -

Una volta estratta la CHTA in questo modo, possiamo finalmente determinare la sua larghezza, altezza e pienezza.

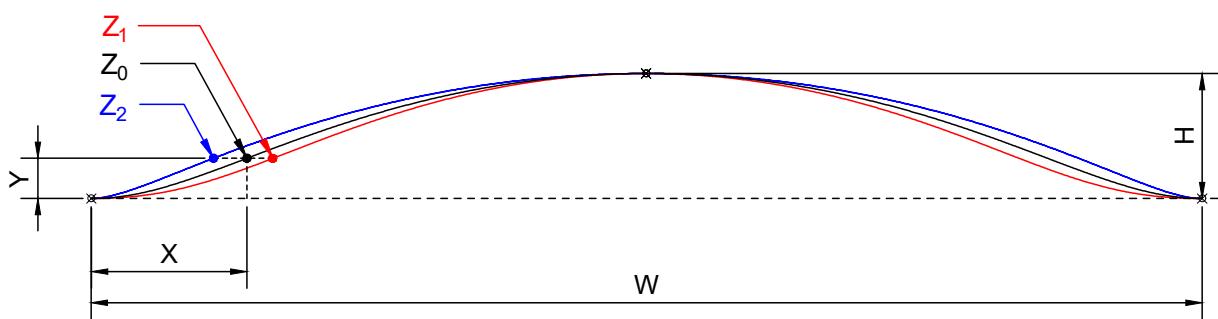


**Figure 23:** Process of extracting an arch from a CHT

Tuttavia, mentre larghezza e altezza possono essere facilmente misurate, è necessario uno standard separato per valutare la pienezza.

### 3.3.3 Pienezza della curva(arch) di Ipotrocoide Accorciata

Per determinare la pienezza di una CHTA, è necessario un punto di riferimento. Questo rapporto chiamerà questo punto di riferimento «Punto di controllo della pienezza  $Z$ » (Fullness control point  $Z$ ). Il punto di controllo della pienezza  $Z$  è un punto arbitrario sulla curva(arch), selezionato a una distanza di circa  $1/8$  a  $1/6$  della larghezza della curva(arch) dall'estremo in direzione x. Questa sezione è scelta perché è dove lo spostamento è maggiore quando la pienezza della curva(arch) cambia, rendendo più facile vedere le variazioni di pienezza.



**Figure 24:** Fullness control point  $Z$

La Figura 24 mostra i punti di controllo della pienezza ( $Z_0, Z_1, Z_2$ ) per tre curve(arch) per confrontare la loro pienezza. Tutti e tre i punti di controllo hanno la stessa altezza sull'asse y ma posizioni diverse sull'asse x. Rispetto al punto di riferimento  $Z_0$  (curva(arch) nera),  $Z_1$  (curva(arch) rossa) si trova all'interno della curva(arch) (a destra), quindi la sua pienezza è giudicata minore. Al contrario,  $Z_2$  (curva(arch) blu) si trova all'esterno della curva(arch) (a sinistra), quindi la sua pienezza può essere considerata maggiore.

Per regolare la pienezza di una CHTA usando questo principio, si deve prima specificare la posizione target del punto di controllo della pienezza. Quindi, si devono trovare i parametri CHT ( $R, r, d$ ) che fanno passare la curva(arch) attraverso quel punto. Trovare i parametri che soddisfano tutte e tre le condizioni — larghezza, altezza e pienezza — per una CHTA è un processo molto complesso. La sezione seguente spiegherà perché è così e come creare una CHTA che soddisfi tutte e tre le condizioni.

### 3.3.4 Caratteristiche della curva(arch) di Ipotrocoide Accorciata

Per creare una CHTA con la larghezza, l'altezza e la pienezza desiderate, si deve capire come la forma della curva(arch) cambia con le variazioni dei parametri ( $R, r, d$ ).

La Figura 25 mostra come la curva(arch) cambia quando  $R, r$ , e  $d$  vengono alterati individualmente. Una diminuzione di  $R$  riduce sia la larghezza che l'altezza. Un aumento di  $r$  aumenta la larghezza ma diminuisce l'altezza. Un aumento di  $d$  aumenta sia la larghezza che l'altezza. È importante notare che da questa figura da sola non si può giudicare la variazione di pienezza, perché anche la larghezza e l'altezza sono cambiate. (Tuttavia, come confermato in precedenza, se la larghezza e l'altezza sono mantenute costanti, la pienezza aumenta al diminuire di  $R$ .)

Come si vede, a differenza di una CTDA, una CHTA ha caratteristiche complesse, che rendono difficile ottenere una curva(arch) desiderata. Ciò richiede numerosi calcoli iterativi tramite computer. Le caratteristiche di una CHTA per ciascun parametro sono riassunte nella tabella sottostante. Nella Tabella 3, «Larghezza» e «Altezza» mostrano i risultati della modifica di un singolo parametro, mentre «Pienezza» mostra il risultato quando larghezza e altezza sono mantenute costanti.

Parameter	Width	Height	Fullness
<b>R</b> –	–	–	–
<b>r</b> +	+	–	·
<b>d</b> +	+	+	·

Table 3: Changes in CHTA according to parameter variation. +:increase, -:decrease

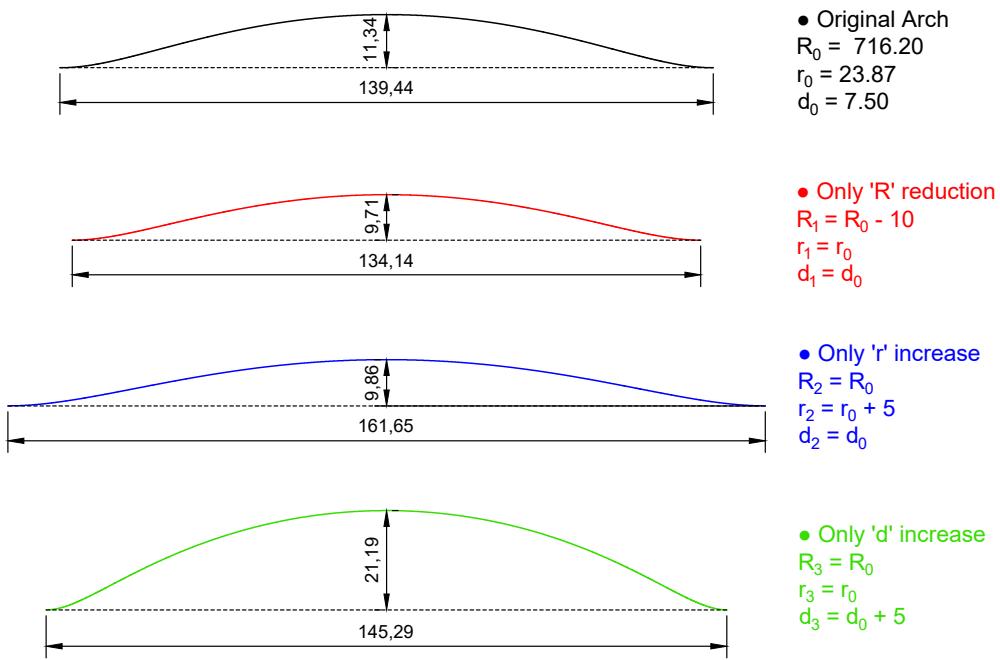


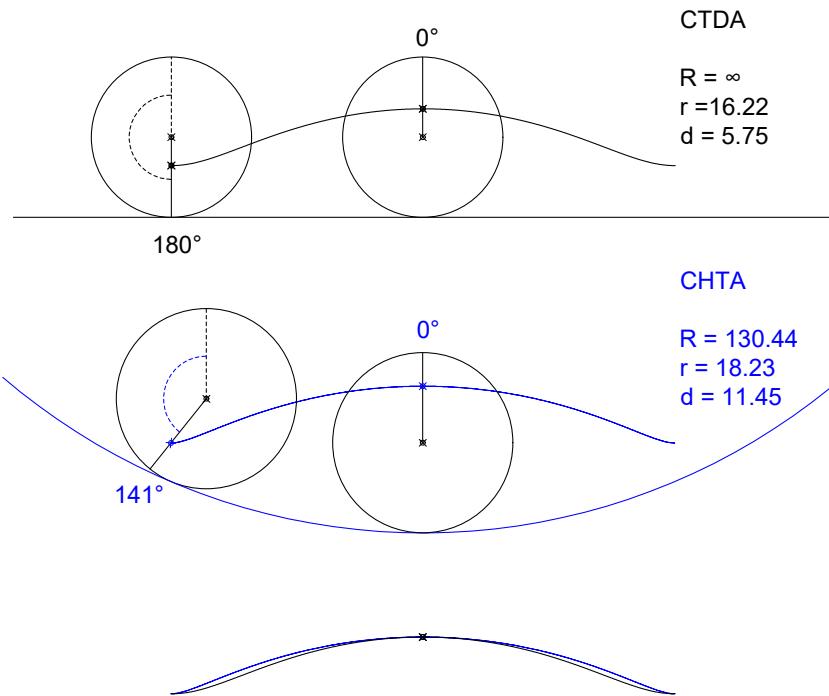
Figure 25: Change in CHTA shape according to parameter variation

### ● Perché la pienezza aumenta al diminuire di R

La Figura 26 illustra perché la pienezza della curva(arch) aumenta quando il raggio ( $R$ ) del cerchio di base viene ridotto per un cerchio che rotola internamente. (Per riferimento, la linea di base retta di un CTDA può essere considerata un cerchio con un raggio infinito.)

La figura mostra che per un CTDA, il cerchio rotante deve ruotare di  $180^\circ$  dall'apice per raggiungere l'estremo. Al contrario, per un CHTA, deve ruotare solo di  $141^\circ$  per raggiungere l'estremo. Questa differenza nell'angolo di rotazione crea la variazione di pienezza. Man mano che l'angolo di rotazione richiesto per raggiungere l'estremo diminuisce, la parte finale della curva(arch) diventa proporzionalmente più vicina all'apice. Ciò accorcia la sezione piatta alle estremità della curva(arch), risultando in una maggiore pienezza.

Al contrario, quando si mira a ridurre la pienezza, si applica il principio opposto, che sarà spiegato in dettaglio nel prossimo capitolo.



**Figure 26:** Change in CHTA according to the value of  $R$

### 3.4 Epitrocoide Accorciata

#### 3.4.1 Definizione di Epitrocoide Accorciata

Una CET è definita come segue.

**Definition 3.6. Epitrocoide Accorciata (CET)**

La traiettoria tracciata da un punto  $P$ , a una distanza  $d$  dal centro di un piccolo cerchio  $A$  con raggio  $r$ , mentre il cerchio  $A$  rotola senza slittare all'esterno di un grande cerchio  $B$  con raggio  $R$ . (dove  $d < r, r < R$ )

La differenza principale tra una CET e una CHT è che il cerchio rotante si muove all'esterno del grande cerchio di base  $B$ , non all'interno.

La sua espressione matematica è la seguente:

$$\begin{cases} x(\theta) = (R + r) \cos(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R + r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (4)$$

$R$  : raggio del grande cerchio B

$r$  : raggio del piccolo cerchio A (dove  $r < R$ )

$d$  : distanza dal centro del piccolo cerchio A al punto P (dove  $d < r$ )

$\theta$  : angolo di rotazione del piccolo cerchio

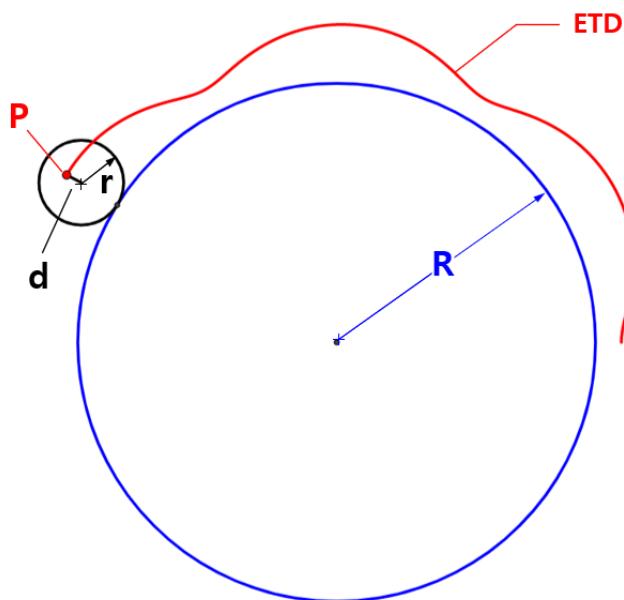


Figure 27: Epitrochoid

La Figura 27 è un esempio di una CET. Come una CHT, anche una CET genera una curva continua. Per usarla come curva(arch), è necessario estrarre un segmento. Questo rapporto chiamerà la curva(arch) estratta da una CET «CETA (Curtate Epitrochoid Arch)», e il suo apice e gli estremi sono definiti come segue.

#### Definition 3.7. Apice di una CETA

Un punto sulla traiettoria che è più lontano dal centro del grande cerchio B.

#### Definition 3.8. Estremi di una CETA

Due punti sulla traiettoria dove una linea perpendicolare alla linea che collega il centro del grande cerchio B e l'apice diventa tangente. Questi due punti sono situati simmetricamente rispetto all'apice.

Il metodo per estrarre una curva(arch) da una CET è leggermente diverso da quello per una CHT, e il processo è il seguente:

### 3.4.2 Estrarre una Curva(arch) da una Epitrocoide Accorciata

1. Disegnare la curva CET.
2. Dei tre punti adiacenti più lontani dal centro del grande cerchio B, selezionare i due punti esterni come «estremi temporanei».<sup>4</sup>
3. Estrarre il segmento tra i due estremi temporanei per creare una «curva(arch) temporanea».
4. Ruotare la curva(arch) temporanea in modo che i suoi estremi siano orizzontali.
5. Sulla curva(arch) temporanea ruotata, trovare i punti in cui la pendenza della tangente è 0; questi sono gli estremi effettivi della curva(arch).
6. Ri-estrarre il segmento tra gli estremi della curva(arch).

### 3.4.3 Pienezza della curva(arch) di Epitrocoide Accorciata

La spiegazione riguardante la pienezza è la stessa della CHTA descritta in precedenza. (Vedi Capitolo 3.3.3)

### 3.4.4 Caratteristiche della curva(arch) di Epitrocoide Accorciata

La Figura 28 mostra come la forma della curva(arch) cambia quando i valori di  $R$ ,  $r$ , e  $d$  vengono alterati. Una diminuzione di  $R$  aumenta sia la larghezza che l'altezza; una diminuzione di  $r$  le riduce entrambe; e una diminuzione di  $d$  aumenta la larghezza e diminuisce l'altezza. Inoltre, come per la CHTA, non si può determinare la variazione di pienezza solo da questa figura.

Le caratteristiche di una CETA sono riassunte nella Tabella 4. Similmente alla CHTA, la larghezza e l'altezza nella tabella sono i risultati della modifica di un singolo parametro, mentre la pienezza è il risultato quando larghezza e altezza sono mantenute costanti.

Parameter	Width	Height	Volume
$R -$	+	+	-
$r -$	-	-	.
$d -$	+	-	.

**Table 4:** Changes in CETA according to parameter variation. +:increase, -:decrease

<sup>4</sup>Il punto centrale è l'apice della curva(arch).

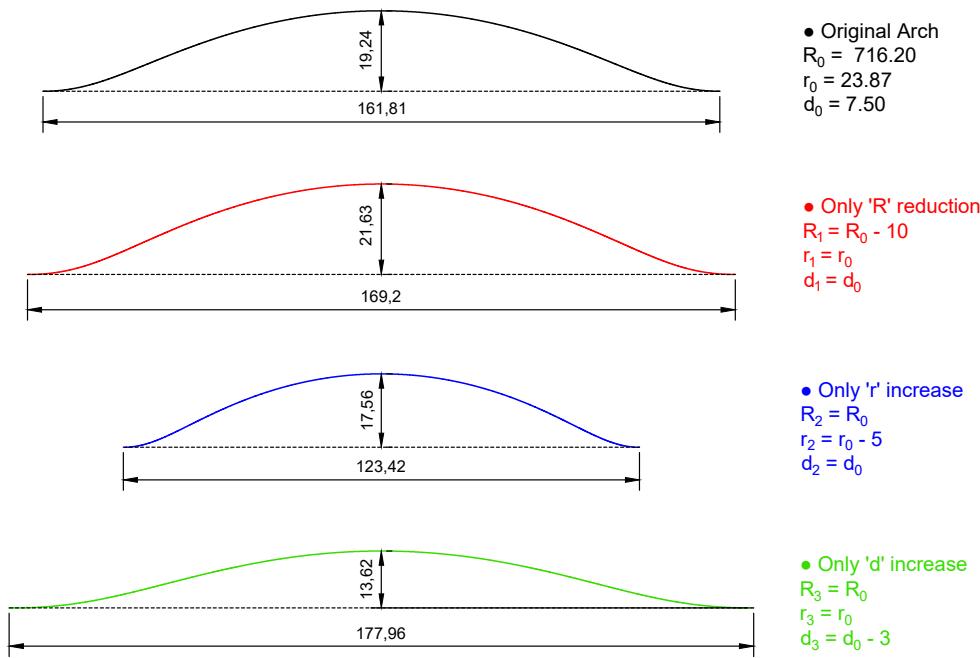
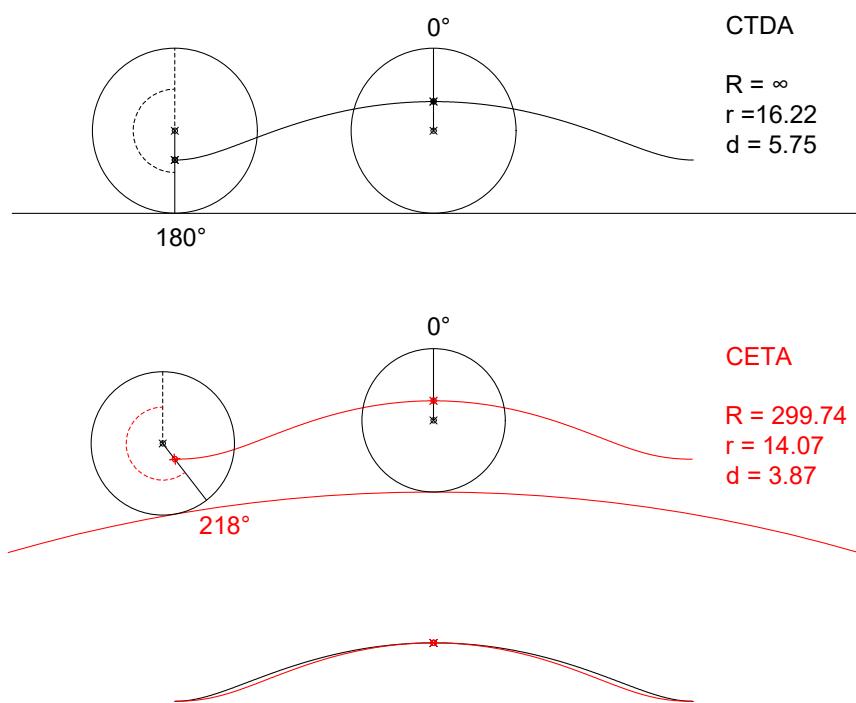


Figure 28: Change in CETA shape according to parameter variation

### ● Perché la pienezza diminuisce al diminuire di R

La Figura 29 illustra perché la pienezza della curva(arch) diminuisce quando il raggio ( $R$ ) del cerchio di base viene ridotto per un cerchio che rotola esternamente. (Per riferimento, la linea di base retta di un CTDA può essere considerata un cerchio con un raggio infinito.)

La figura mostra che per un CTDA, il cerchio rotante deve ruotare di  $180^\circ$  dall'apice per raggiungere l'estremo. Al contrario, per un CETA, deve ruotare di  $218^\circ$ . Man mano che l'angolo di rotazione richiesto per raggiungere l'estremo aumenta, la parte finale della curva(arch) diventa proporzionalmente più lontana dall'apice. Ciò allunga la sezione piatta alle estremità della curva(arch), risultando in una pienezza ridotta.



**Figure 29:** Variazione della CETA in base al valore di  $R$

## 4 Creazione di Curve(arch) Trocoidi

Se la pienezza della curva(arch) target è maggiore di quella di una CTDA con la stessa larghezza e altezza, si crea una CHTA. Se è minore, si crea una CETA. Se la pienezza è la stessa (il che è statisticamente molto raro), si crea una CTDA.

### 4.1 Creazione di una Curva(arch) di Trocoide Accorciata

Come spiegato nel Capitolo 3.2.1, il principio di generazione di una CTDA è semplice. Pertanto, può essere creata immediatamente se sono note la larghezza e l'altezza della curva(arch) desiderata.

Ad esempio, supponiamo di creare una CTDA con una larghezza di 100 e un'altezza di 15. Dopo aver calcolato i valori di  $r$  e  $d$  secondo l'Equazione 3, possiamo ottenere la curva semplicemente sostituendo questi valori nella formula.

$$\begin{cases} r = W/2\pi = 100/(2 * 3.14) = 15.92 \\ d = H/2 = 15/2 = 7.5 \end{cases} \quad (5)$$

### 4.2 Creazione di una Curva(arch) di Ipotrocoide Accorciata

Una CHTA è usata per creare una curva(arch) con una pienezza maggiore di una CTDA. Il processo di creazione inizia con una CTDA. Poiché una CTDA è equivalente a uno stato in cui il raggio ( $R$ ) del grande cerchio di base è infinito (una linea retta), la curva(arch) desiderata si trova diminuendo gradualmente questo valore di  $R$ . Il metodo dettagliato è il seguente:

1. Determinare se la pienezza della curva(arch) target è maggiore o minore di quella di una CTDA. Se è maggiore, creare una CHTA.
2. Decidere il valore iniziale di  $R$ .<sup>5</sup> Poiché il valore di  $R$  della maggior parte delle CHTA completate non supera  $400r$ , è consigliabile partire da circa  $500r$  (500 volte il valore di  $r$ ).
3. Dal valore iniziale di  $R$  impostato, calcolare iterativamente aumentando leggermente  $r$  e  $d$  fino a quando la larghezza e l'altezza della curva(arch) raggiungono i valori target.
4. Una volta che la larghezza e l'altezza corrispondono ai valori target, controllare la pienezza. Se la pienezza è insufficiente, diminuire il valore di  $R$ .
5. Con il valore ridotto di  $R$ , ripetere il calcolo aumentando  $r$  e  $d$  fino a quando la larghezza e l'altezza raggiungono nuovamente i valori target.
6. Ripetere i passaggi 4 e 5 fino a quando larghezza, altezza e pienezza soddisfano tutti i valori target.

<sup>5</sup>Invece di partire dall'infinito, partiamo da un valore specifico. Usare un numero infinitamente grande renderebbe il tempo di calcolo infinitamente lungo.

Il metodo sopra descritto è un riassunto semplificato del processo di calcolo. In realtà, sono necessarie operazioni molto più complesse a causa di problemi come errori di quantizzazione digitale e tempo di calcolo. Il motivo per cui si diminuisce il valore di  $R$  durante questi calcoli è per aumentare gradualmente la pienezza. Al diminuire di  $R$ , diminuiscono anche la larghezza e l'altezza della curva(arch). Per riportarli ai valori target,  $r$  e  $d$  vengono continuamente regolati verso l'alto. Qui, aumentare  $d$  aumenta sia la larghezza che l'altezza, ma aumentare  $r$  in realtà diminuisce l'altezza. Questa differenza viene utilizzata per regolare opportunamente  $r$  e  $d$  per far corrispondere larghezza e altezza.

### 4.3 Creazione di una Curva(arch) di Epitrocoide Accorciata

Una CETA è usata per creare una curva(arch) con una pienezza minore di una CTDA. Il principio di generazione è simile a quello di una CHTA, partendo da una CTDA. In altre parole, partiamo da uno stato in cui il raggio ( $R$ ) del cerchio di base è infinito e diminuiamo gradualmente il valore di  $R$  per trovare la curva(arch) desiderata. Il metodo dettagliato è il seguente:

1. Determinare se la pienezza della curva(arch) target è maggiore o minore di quella di una CTDA. Se è minore, creare una CETA.
2. Decidere il valore iniziale di  $R$ . (Generalmente, il valore di  $R$  per una CETA è leggermente più grande di quello per una CHTA.)
3. Dal valore iniziale di  $R$  impostato, calcolare iterativamente diminuendo leggermente  $r$  e  $d$  fino a quando la larghezza e l'altezza della curva(arch) raggiungono i valori target.
4. Una volta che la larghezza e l'altezza corrispondono ai valori target, controllare la pienezza. Se la pienezza è eccessiva, diminuire il valore di  $R$ .
5. Con il valore ridotto di  $R$ , ripetere il calcolo diminuendo  $r$  e  $d$  fino a quando la larghezza e l'altezza raggiungono nuovamente i valori target.
6. Ripetere i passaggi 4 e 5 fino a quando larghezza, altezza e pienezza soddisfano tutti i valori target.

Il motivo per cui si diminuisce il valore di  $R$  durante questi calcoli è per ridurre gradualmente la pienezza. Per una CETA, al diminuire di  $R$ , la larghezza e l'altezza in realtà aumentano. Pertanto, per riportarli ai valori target,  $r$  e  $d$  vengono continuamente regolati verso il basso.

### 4.4 Curve(arch) Trocoidi che non possono essere create

Ci sono limiti alla pienezza che può essere regolata con una CHTA e una CETA. Ciò può comportare casi in cui la curva(arch) desiderata non può essere creata. Queste limitazioni possono essere ampiamente divise in due tipi. In entrambi i casi, viene utilizzata una curva di approssimazione come alternativa.

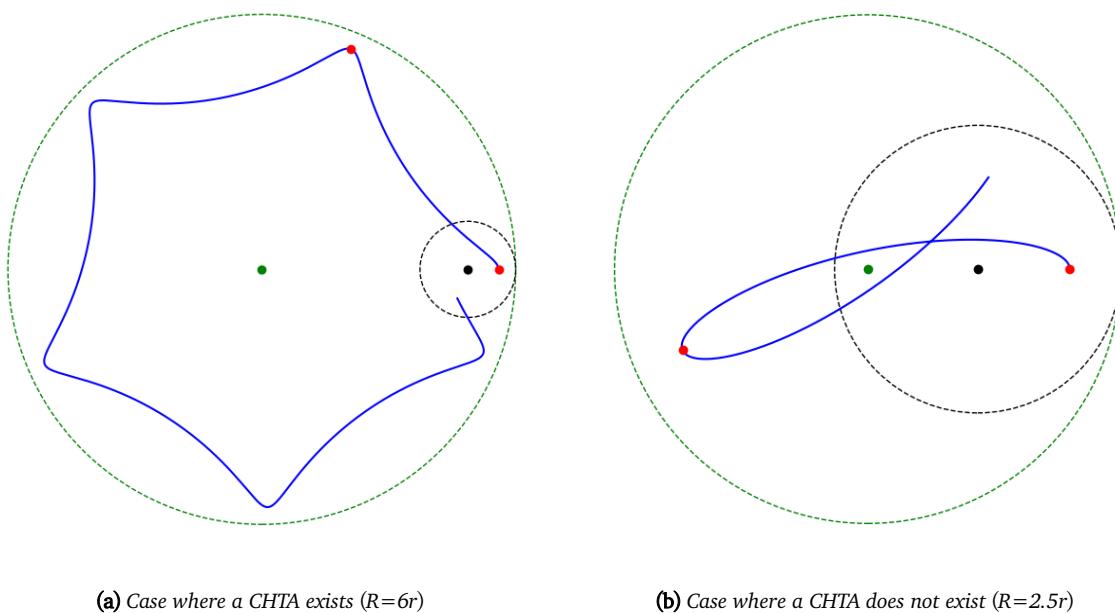
#### 4.4.1 Casi in cui la curva(arch) non esiste

Si riferisce a casi in cui la curva CHT o CET stessa viene generata, ma da essa non può essere estratta una forma di curva(arch) (CHTA, CETA). Ad esempio, se il valore di  $R$  viene ridotto troppo nel tentativo di aumentare

eccessivamente la pienezza, si forma una curva CHT, ma il segmento che soddisfa le condizioni di base di una curva(arch) scompare.

La pienezza di una CHTA e di una CETA non può essere aumentata o diminuita indefinitamente. Oltre un certo limite, la curva non soddisfa più le condizioni di base di una curva(arch). Come mostrato nella Figura 30, se il valore di  $R$  viene ridotto troppo, la curva CHT generata non contiene più un segmento che può essere definito come una curva(arch).

Per una larghezza e un'altezza fisse, chiamiamo la curva(arch) con la massima pienezza possibile che si può realizzare con una trocoide «maxCHTA», e quella con la pienezza minima «minCETA». In effetti, la 5<sup>a</sup> curva(arch) del fondo dei Modelli A, B e C ha spesso una pienezza maggiore persino della «maxCHTA». Per ricostruire curve(arch) che superano i limiti delle trocoidi, sono necessarie le curve di approssimazione discusse nel prossimo capitolo.



**Figure 30: Existence of an arch segment in a CHT curve**

#### 4.4.2 Casi in cui la curva(arch) esiste ma non può essere creata

Si riferisce a casi in cui una CHTA o una CETA esiste teoricamente ma non può essere creata a causa di limitazioni computazionali. Ciò significa non riuscire a trovare una soluzione esatta a causa di errori derivanti dal processo di calcolo digitale, come problemi di precisione e fallimenti di ottimizzazione.

Sebbene una curva TD sia intrinsecamente una linea continua, un computer la rappresenta come un insieme di numerosi punti (valori discreti). Se la soluzione esatta che stiamo cercando si trova tra questi punti, il computer potrebbe non riuscire a trovarla, causando il fallimento del calcolo.

A causa di questo problema di quantizzazione digitale, sono necessari compromessi appropriati nel processo di calcolo. Se il punto di compromesso è impostato in modo errato, il calcolo può fallire o il tempo richiesto può aumentare esponenzialmente. Pertanto, in tali casi, l'utilizzo di una curva di approssimazione è più efficiente.

## 5 Curva di Approssimazione Trocoide

Quando la pienezza della curva(arch) target cade al di fuori dell'intervallo esprimibile di una CHTA o CETA, o quando non può essere creata per problemi computazionali, dobbiamo creare e utilizzare una curva(arch) simile.

Ad esempio, se la massima pienezza ottenibile è 10 ma si desidera una curva(arch) con una pienezza di 12, creiamo prima una curva(arch) con una pienezza di 10 e poi la trasformiamo per avere una pienezza di 12. Come altro esempio, se il calcolo per una curva(arch) con una pienezza di 7 fallisce, creiamo una curva(arch) con una pienezza di 6.9 e la trasformiamo per diventare 7. Come mostrato nella Figura 31, il principio è che se una curva che passa attraverso i punti target  $Z_1$  o  $Z_2$  non può essere creata per qualsiasi motivo, si genera prima una curva realizzabile che passa per  $Z_0$  e poi la si trasforma per passare attraverso  $Z_1$  o  $Z_2$ .

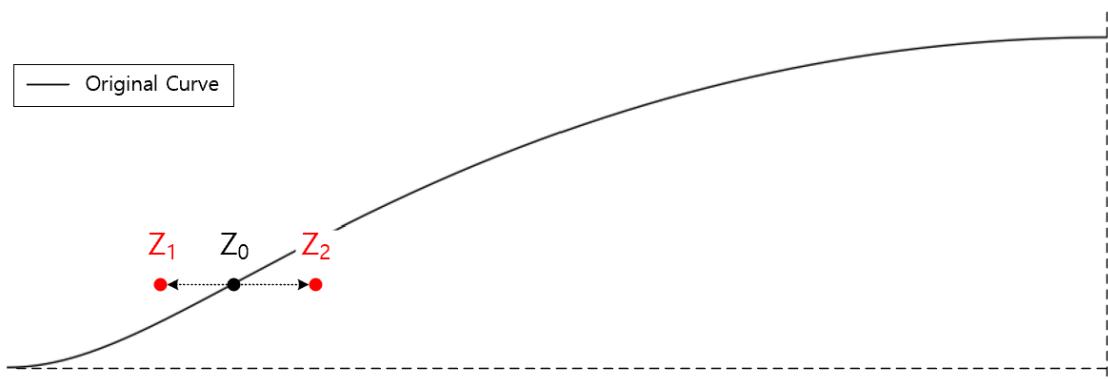


Figure 31: Concept of the approximation curve

Pertanto, quando la curva(arch) target non può essere creata direttamente, la curva ottenuta creando prima una curva(arch) realizzabile e poi trasformandola sarà chiamata «Curva(arch) Approssimata (Approximated Arch)» o «Curva di Approssimazione (Approximation Curve)». Di seguito, questo rapporto esaminerà i principi e il metodo di creazione della curva di approssimazione.

Per riferimento, il concetto di «curva di approssimazione» si applica solo alle curve(arch) dal n. 1 al n. 5. Il metodo per creare la curva(arch) n. 6 è simile, ma non è chiamato «approssimazione» perché l'obiettivo non è quello di assomigliare a una CHTA o CETA.

A rigore, la curva creata quando la curva target teoricamente non esiste (ad es., quando la pienezza supera «max-CHTA») è più vicina a una «creazione» che a un'«approssimazione». D'altra parte, il risultato quando la curva esiste ma non può essere creata per motivi computazionali può essere chiamato «approssimazione». Tuttavia, per comodità in questo rapporto, entrambi i casi saranno collettivamente indicati come «curve di approssimazione».

## 5.1 Principio di Base della Curva di Approssimazione

La curva di approssimazione viene creata regolando la pienezza di una CHTA o CETA originale. Il principio è quello di spostare orizzontalmente i numerosi punti che compongono la curva originale. Durante questo processo, la dolce forma a S della curva originale deve essere mantenuta e la pendenza della tangente deve essere «0» agli estremi e all'apice. Per ottenere ciò, devono essere applicati diversi valori di spostamento a ciascun punto della curva.

Ad esempio, l'apice e gli estremi della curva(arch) non devono muoversi. Il valore dello spostamento must increase towards the middle and decrease towards the ends to maintain the overall arch shape. È necessaria una regola per determinare lo spostamento orizzontale di ogni punto.

La Figura 32 spiega la regola di spostamento orizzontale dei punti. (a) è il caso di aumento della pienezza, e (b) è il caso di diminuzione della pienezza.

L'apice e gli estremi della curva(arch) originale (nero) devono essere fissi, mentre solo la parte centrale deve essere spostata. La quantità di spostamento dovrebbe aumentare verso il centro e diminuire verso le estremità. La curva che rappresenta questa regola dovrebbe avere la forma di una curva liscia. Inoltre, le estremità di questa curva devono avere le stesse coordinate x dell'apice e degli estremi della curva(arch) originale, e i loro valori y devono essere «0».

Questo rapporto chiamerà la curva che rappresenta questa regola di spostamento «Curva di Trasformazione» (Transformation pattern curve). La forma della Curva di Trasformazione determina la forma finale della curva di approssimazione, e la sua ampiezza (altezza) determina la quantità di variazione della pienezza. Cioè, maggiore è l'ampiezza, maggiore è lo spostamento di ogni punto, risultando in una maggiore variazione della pienezza.

La Curva di Trasformazione indica di quanto spostare orizzontalmente ogni punto della curva(arch) originale. Ad esempio, nella Figura (a), per sapere di quanto spostare un punto  $p$  sulla curva(arch) originale, si trova il punto  $p'$  sulla Curva di Trasformazione con la stessa coordinata x di  $p$ . Se il valore y di  $p'$  è  $-3$ , allora il punto  $p$  deve essere spostato di  $-3$  in direzione x, cioè di 3 unità a sinistra. Spostando tutti i punti della curva(arch) originale orizzontalmente in base ai valori y della Curva di Trasformazione, si crea una nuova curva di approssimazione.

Il fatto che la Curva di Trasformazione sia convessa verso l'alto o verso il basso determina se la pienezza della curva(arch) aumenta o diminuisce. La figura sopra usa la metà sinistra della curva(arch) come esempio. In questo caso, spostare i punti a sinistra aumenta la pienezza, e spostarli a destra la diminuisce. Pertanto, se la Curva di Trasformazione è convessa verso il basso (valore y negativo), la pienezza aumenta, e se è convessa verso l'alto (valore y positivo), la pienezza diminuisce. Per la metà destra della curva(arch), questa direzione è invertita.

Quindi, quale curva dovrebbe essere usata come Curva di Trasformazione? Lo scopo della curva di approssi-

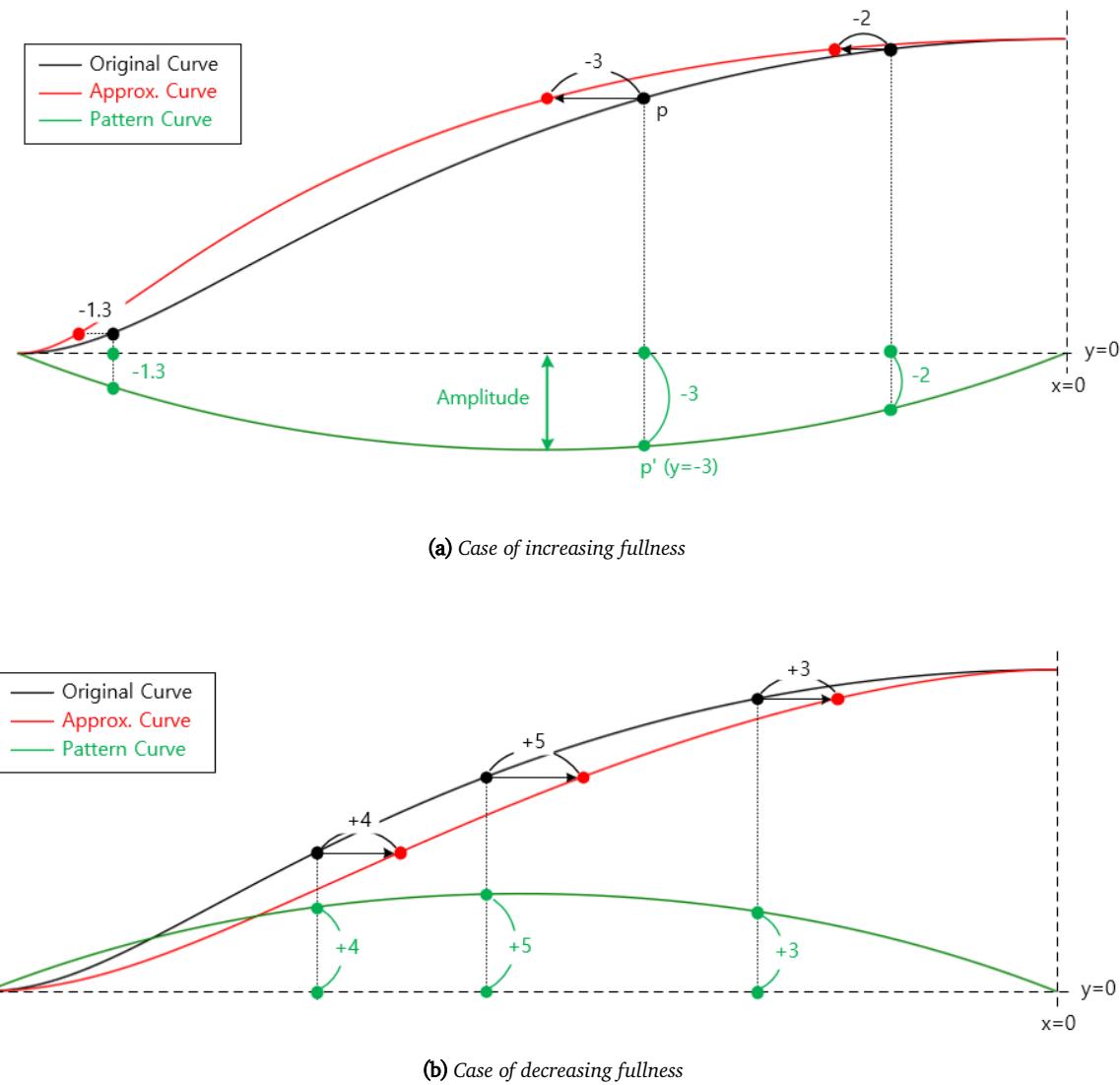


Figure 32: Principle of creating an approximation curve using a pattern curve

mazione è cambiare solo la pienezza mantenendo il più possibile la forma della curva(arch) trocoide originale. Pertanto, se una curva di approssimazione creata con una certa Curva di Trasformazione corrisponde perfettamente a una curva(arch) trocoide reale con la stessa pienezza target, quella Curva di Trasformazione può essere considerata ideale.

Varie curve come curve(arch) di cerchio, ellissi e catenarie possono essere considerate come candidate per la Curva di Trasformazione. Dopo aver testato diverse curve, questo rapporto ha riscontrato solo differenze minori e non è riuscito a trovare una curva ideale. Tra queste, la curva Catenaria ha dato i risultati migliori. Tuttavia, è stato difficile ottenere una curva di approssimazione soddisfacente con la sola curva catenaria, quindi questo rapporto ha deciso di apportare lievi modifiche ad essa per creare la Curva di Trasformazione finale.

Per comodità, d'ora in poi, una curva di approssimazione creata da una CHTA sarà indicata come nCHTAce, da una CETA come nCETAice, e da una CTDA come CTDAce o CTDAice (vedi appendice per le abbreviazioni).

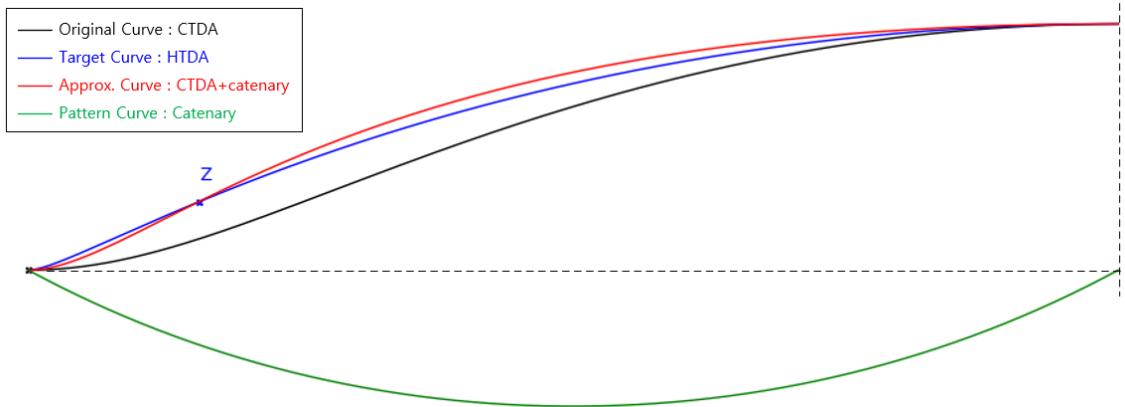
## 5.2 Creazione della Curva di Trasformazione

La curva catenaria è usata come Curva di Trasformazione. Il modello ottimale si trova osservando la curva di approssimazione creata modificando leggermente la forma di questa curva.

In primo luogo, a condizione che la larghezza e l'altezza della curva(arch) siano le stesse, vengono confrontate le seguenti quattro curve.

- Curva originale A: CTDA
- Curva target B: CHTA che passa attraverso il punto di controllo della pienezza target  $Z$
- Curva di Trasformazione C: Curva catenaria usata per creare la curva di approssimazione D
- Curva di approssimazione D: La curva risultante creata trasformando la curva originale A con la Curva di Trasformazione C per passare attraverso il punto di controllo della pienezza  $Z$

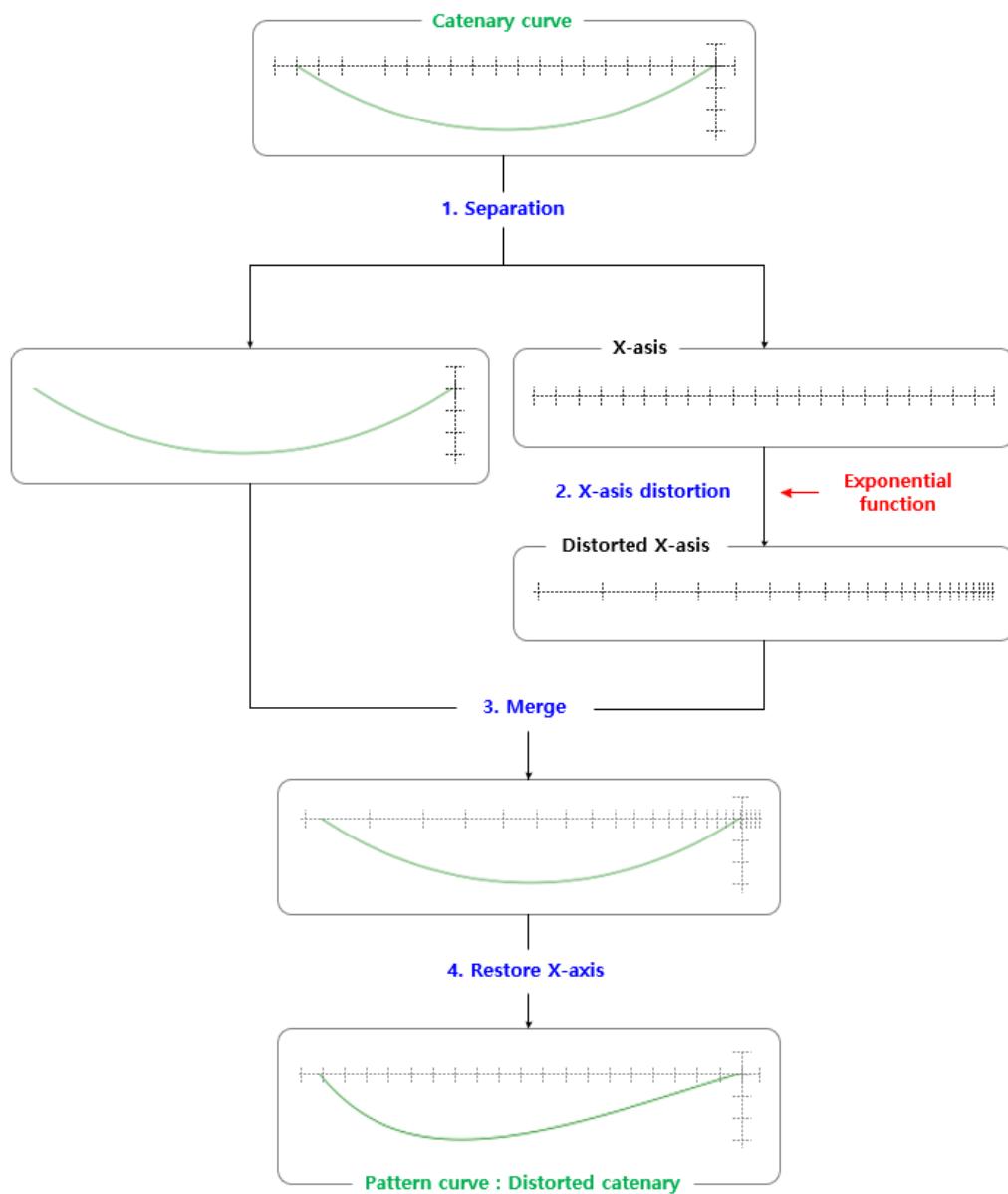
Questo processo verifica quanto la curva di approssimazione (D) sia simile alla curva target (B). Se B e D si sovrappongono completamente, la Curva di Trasformazione usata per la trasformazione può essere considerata ideale. Se non corrispondono, possiamo vedere la differenza e determinare come modificare la Curva di Trasformazione. La Figura 33 mostra queste quattro curve insieme.



**Figure 33: Approximation curve using a catenary curve**

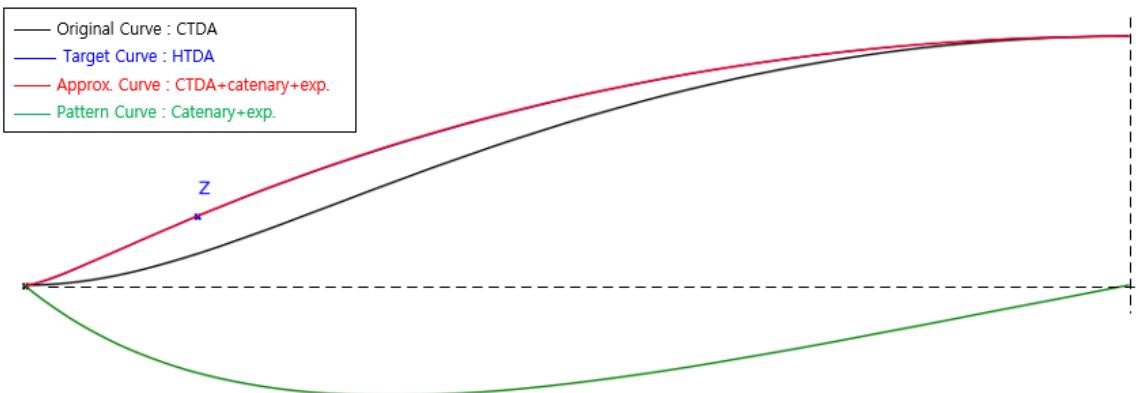
Nella figura, la curva di approssimazione (rossa) mostra una pienezza insufficiente verso l'estremità della curva(arch) e una pienezza eccessiva verso l'apice, rispetto al punto di controllo della pienezza  $Z$ . Ciò significa che la Curva di Trasformazione (verde) non fornisce una trasformazione sufficiente vicino all'estremità della curva(arch) e ne fornisce troppa vicino all'apice. Per risolvere questo problema, l'apice della curva catenaria attualmente convessa verso il basso deve essere spostato verso l'estremità della curva(arch). Tale spostamento dell'apice è equivalente a concentrare la curva su un lato e può essere implementato applicando una funzione esponenziale alla curva catenaria. Un valore di esponente positivo concentra la curva a sinistra, mentre un valore negativo la concentra a destra.

Il metodo per applicare una funzione esponenziale alla curva catenaria è il seguente. In primo luogo, l'asse x stesso viene distorto (allungato o compresso) applicando una funzione esponenziale. Quindi, la curva catenaria originale viene disegnata sull'asse x distorto. Infine, l'asse x viene ripristinato al suo stato originale. (-Figura 34-)



**Figure 34:** Method of applying an exponential function to a catenary curve

La curva di approssimazione creata spostando la posizione dell'apice della curva catenaria (concentrandola su un lato) usando il metodo sopra descritto cambia come mostrato nella Figura 35.



**Figure 35:** Approximation curve using an exponentially distorted catenary curve

La figura mostra che la curva target (blu) e la curva di approssimazione (rossa) sono quasi identiche. Il valore dell'esponente usato qui è il più adatto per la larghezza e l'altezza attuali della curva(arch). Se la larghezza e l'altezza della curva(arch) sono le stesse, questo valore ottimale dell'esponente può essere usato in modo coerente, indipendentemente dalla grandezza della pienezza. Tuttavia, questo valore è applicabile solo quando si aumenta la pienezza. Quando si diminuisce la pienezza, la direzione dello spostamento dell'apice della Curva di Trasformazione è opposta, quindi è necessario trovare separatamente un valore ottimale dell'esponente diverso, con segno e grandezza diversi.

La ricerca del valore ottimale dell'esponente viene eseguita tramite calcoli iterativi al computer. La differenza tra la curva di approssimazione e la curva target viene calcolata come un'area di errore, e viene selezionato il valore dell'esponente che minimizza quest'area.

Di seguito la spiegazione matematica di questo processo.

La definizione e l'equazione generale di una curva catenaria sono le seguenti.

#### Definition 5.1. Curva catenaria

*La curva formata da una catena o una corda flessibile, inestensibile e di densità uniforme, sospesa a due punti e pendente sotto il proprio peso.*

$$y = a \cosh \left( \frac{x}{a} \right) \quad (6)$$

Qui,  $a$  è una costante che rappresenta la distanza dal punto più basso della curva all'asse x, che determina la larghezza e la forma della curva. In questo rapporto, per fissare a «0» lo spostamento a entrambe le estremità di un intervallo specifico  $(x_s, x_e)$  e per poter controllare l'ampiezza ( $A$ ), l'equazione viene modificata e usata come segue.

$$y = A \left[ \cosh \left( \frac{x' - x_c}{w} \right) - \cosh(1) \right] \quad (7)$$

Qui,  $x_c$  è il centro della curva,  $w$  determina la larghezza e  $x'$  è la coordinata finale immessa nella funzione.

Per rendere la curva asimmetrica, la coordinata di input  $x'$  viene generata distorcendo la coordinata x originale  $x_o$  con una funzione esponenziale. Questo processo viene applicato dopo aver normalizzato  $x_o$  nell'intervallo  $[0, 1]$ .

$$x' = \left( \frac{e^{\left( \frac{x_o - x_s}{L} \right) \cdot \text{expo}} - 1}{e^{\text{expo}} - 1} \right) \cdot L + x_s \quad , \text{ dove } L = x_e - x_s \quad (8)$$

La «funzione catenaria distorta esponenzialmente» finale, che combina le equazioni precedenti, è la seguente.

$$y(x_o) = A \cdot \left( \cosh \left( \frac{x' - x_c}{w} \right) - \cosh(1) \right) \quad (9)$$

$x_o$  : coordinata X originale

$A$  : coefficiente che determina l'ampiezza complessiva della curva

$x'$  : coordinata finale immessa nella funzione

$x_s, x_e$  : intervallo dell'asse x della curva

expo : coefficiente che determina l'intensità e la direzione della distorsione esponenziale

$x_c, w$  : coefficienti di centro e larghezza della curva catenaria ( $x_c = \frac{x_s + x_e}{2}, w = \frac{L}{2}$ )

## 6 Creazione di Curve di Approssimazione Trocoide

Le curve di approssimazione vengono create dividendo il processo in due casi. Il primo è quando la curva(arch) target teoricamente non esiste, e il secondo è quando esiste ma non può essere creata per problemi computazionali.

### 6.1 Caso in cui la curva(arch) Non Esiste

La sequenza di creazione è la seguente:

1. Generare una CTDA e una maxCHTA (o minCETA), ciascuna con la stessa larghezza e altezza della curva(arch) target.

2. Regolare il valore dell'esponente e l'ampiezza della Curva di Trasformazione per trovare il valore ottimale dell'esponente al quale la curva di approssimazione, trasformata dalla CTDA, assomiglia più da vicino alla maxCHTA (o minCETA).
3. Applicare il valore ottimale dell'esponente trovato in precedenza alla Curva di Trasformazione. Quindi, riadattare l'ampiezza per trasformare la maxCHTA (o minCETA), completando così la curva di approssimazione finale, nCHTAce (o nCETAice).

(※ Per ridurre l'errore della curva di approssimazione, si deve notare quanto segue. Nel determinare il valore dell'esponente, calcolare l'area della curva chiusa formata dalle due curve (area di errore) e selezionare il valore dell'esponente che minimizza quest'area. Tuttavia, anche se l'area di errore è piccola, la forma complessiva delle curve può differire. Pertanto, si dovrebbe confrontare anche la deviazione standard e scegliere un valore che offra un buon equilibrio tra bassa area di errore e bassa deviazione standard.)

## 6.2 Caso in cui la curva(arch) Esiste ma non può essere Creata per Ragioni Computazionali

La sequenza di creazione è la seguente:

1. Generare una CTDA e una maxCHTA (o minCETA), ciascuna con la stessa larghezza e altezza della curva(arch) target.
2. Regolare il valore dell'esponente della Curva di Trasformazione per trovare il valore ottimale dell'esponente al quale la curva di approssimazione, trasformata dalla CTDA, assomiglia più da vicino alla maxCHTA (o minCETA).
3. Generare come curva originale la nCHTA (o nCETA) calcolabile che è più vicina in pienezza alla curva target.
4. Applicare il valore ottimale dell'esponente trovato in precedenza alla Curva di Trasformazione. Quindi, regolare l'ampiezza in modo che la curva di approssimazione, trasformata dalla curva originale (nCHTA) creata al punto 3, passi attraverso il punto di controllo della pienezza target.
5. Usando il valore dell'esponente e l'ampiezza trovati nel passaggio precedente, trasformare la nCHTA (o nCETA) per completare la curva di approssimazione finale, nCHTAce (o nCETAice).

Se la curva target è molto simile a una CTDA, il parametro  $R$  può diventare molto grande, imponendo un carico pesante sul calcolo (in termini di tempo, precisione, ecc.). Pertanto, l'uso di una curva di approssimazione è efficiente anche in questo caso. Qui, una CTDA viene utilizzata come curva originale invece di una nCHTA (o nCETA), e la curva di approssimazione generata è indicata come CTDAce (o CTDAice).

(※ Per ridurre l'errore della curva di approssimazione, si devono notare i seguenti punti. Primo, quando si trova il valore dell'esponente della Curva di Trasformazione, si dovrebbe usare come base il caso con il maggiore spostamento. Cioè, la curva originale dovrebbe essere impostata su una CTDA e la curva target su una maxCHTA (o minCETA) per il calcolo. Secondo, quando si crea la curva di approssimazione finale, si dovrebbe usare come curva(arch) originale la CHTA (o CETA) calcolabile più vicino al punto di controllo della pienezza target. Terzo,

il valore ottimale dell'esponente dovrebbe essere selezionato considerando sia l'area di errore che la deviazione standard.)

## 7 La 6<sup>a</sup> Curva(arch)

Mentre le larghezze delle curve(arch) n. 1-5 sono determinate principalmente dalla larghezza della tavola, le loro altezze sono determinate dalla forma della 6<sup>a</sup> curva(arch). Pertanto, la 6<sup>a</sup> curva(arch) può essere considerata il passo più importante nel processo di ricostruzione.

La 6<sup>a</sup> curva(arch) ha una pienezza maggiore rispetto alle altre curve(arch), e la sua forma presenta una lunga sezione piatta vicino all'apice. A causa di queste caratteristiche, non può essere ricostruita con una CHTA standard. Pertanto, deve essere creata trasformando una CTDA utilizzando una Curva di Trasformazione separata.

### 7.1 Principio di Creazione della 6<sup>a</sup> Curva(arch)

Poiché la 6<sup>a</sup> curva(arch) ha una forma diversa dalle altre, sono necessari punti di riferimento aggiuntivi per definire la sua forma. Mentre le curve(arch) n. 1-5 erano definite da un totale di tre punti (apice, estremi e punto di controllo della pienezza), la 6<sup>a</sup> curva(arch) richiede almeno altri due punti di riferimento. Inoltre, mentre le curve(arch) n. 1-5 sono simmetriche, la 6<sup>a</sup> curva(arch) è asimmetrica, quindi deve essere creata dividendola in parti superiore e inferiore in base all'apice.<sup>6</sup>

Come punti di riferimento aggiuntivi per determinare la forma della 6<sup>a</sup> curva(arch), vengono utilizzati il primo e il quarto punto che rappresentano le posizioni delle linee di contorno (di seguito «punti di contorno»). La curva di ricostruzione deve passare attraverso il punto di controllo della pienezza  $Z$ . Tuttavia, la pienezza parziale sul lato dell'estremo e sul lato dell'apice, rispetto a  $Z$ , può variare a seconda della forma della Curva di Trasformazione. Pertanto, il primo e il quarto punto di contorno vengono utilizzati come punti di riferimento aggiuntivi per controllare e regolare la pienezza di queste due parti.

Idealmente, la curva di ricostruzione dovrebbe passare attraverso tutti i punti di contorno e le posizioni delle curve(arch) n. 1-5. Tuttavia, come si è visto in precedenza, le posizioni dei punti di contorno dei modelli contengono errori, risultando in una superficie irregolare. Pertanto, è ragionevole selezionare alcuni dei punti meglio posizionati come punti di riferimento. Poiché il punto di controllo della pienezza (il secondo punto di contorno) deve essere attraversato, si posiziona un punto di riferimento su ciascun lato di esso. Il primo punto di contorno viene selezionato sul lato dell'estremo della curva(arch), e il quarto punto di contorno, che reagisce più sensibilmente alle variazioni della forma della Curva di Trasformazione, viene selezionato sul lato dell'apice.

La curva di ricostruzione passerà sempre attraverso l'estremo della curva(arch), il punto  $Z$  e l'apice della curva(arch). Con questa condizione, verifichiamo se passa anche attraverso il primo e il quarto punto di contorno. Se la curva passa sopra un punto di contorno, la pienezza è eccessiva; se passa sotto, è insufficiente. Sulla base di questo risultato, la forma della Curva di Trasformazione viene regolata in modo che la curva di ricostruzione passi anche attraverso questi due punti di contorno.

<sup>6</sup>Poiché le curve(arch) dei modelli non sono simmetriche, questo rapporto ricostruisce separatamente i lati sinistro e destro delle curve(arch) n. 1-5.

Questo rapporto chiamerà questi due punti di riferimento aggiuntivi, usati per determinare la forma della 6<sup>a</sup> curva(arch), «Punti di controllo della forma» (Shape control points). Quello sul lato dell'estremo della curva(arch) rispetto al punto di controllo della pienezza è definito come «Punto di controllo della forma-inferiore», e quello sul lato dell'apice è «Punto di controllo della forma-superiore». Pertanto, il punto di controllo della forma-inferiore è il primo punto di contorno, e il punto di controllo della forma-superiore è il quarto punto di contorno. Tuttavia, come per il punto di controllo della pienezza, l'uso dei punti di contorno come punti di controllo della forma è solo per comodità. Qualsiasi punto sulla curva(arch) target può essere usato come punto di controllo. Sono stati scelti semplicemente perché i valori di posizione dei punti di contorno sono già noti; sarebbe accettabile anche usare il quinto o il sesto punto di contorno invece del quarto come punto di controllo della forma-superiore.

La Curva di Trasformazione per la 6<sup>a</sup> curva(arch) viene creata mescolando una «curva polinomiale cubica», una «curva esponenziale» e una «curva catenaria». La curva catenaria regola la pienezza complessiva, facendo passare la curva di ricostruzione attraverso il punto di controllo della pienezza. La curva polinomiale cubica regola la forma generale della curva(arch), e la curva esponenziale serve a perfezionare la forma. Pertanto, nel ricreare la curva(arch), i parametri (ampiezza, valore dell'esponente, ecc.) di queste tre curve devono essere combinati in modo appropriato.

## 7.2 Creazione della Curva di Trasformazione

Una curva polinomiale cubica è simile a una curva catenaria ma ha una forma asimmetrica che è più piatta da un lato. Assomiglia a un cucchiaio, con un lato concavo (la parte della coppa) e l'altro che si estende a lungo (la parte del manico). La lunghezza e la posizione (sinistra/destra) di questo manico, così come l'ampiezza della curva, determinano l'aspetto della curva(arch) ricostruita. Ad esempio, creando la metà sinistra di una curva(arch), se il manico è a sinistra, la curva(arch) ricostruita avrà meno pienezza all'estremo e una pienezza crescente verso l'apice (effetto di pendenza crescente). La lunghezza del manico è controllata applicando una funzione esponenziale alla curva polinomiale cubica, il che significa concentrare la curva a sinistra o a destra. Un valore di esponente positivo la concentra a sinistra, e un valore negativo a destra. Generalmente, il manico è posizionato a sinistra, ma in alcuni casi può essere posizionato a destra.

Di seguito una spiegazione della curva polinomiale cubica.

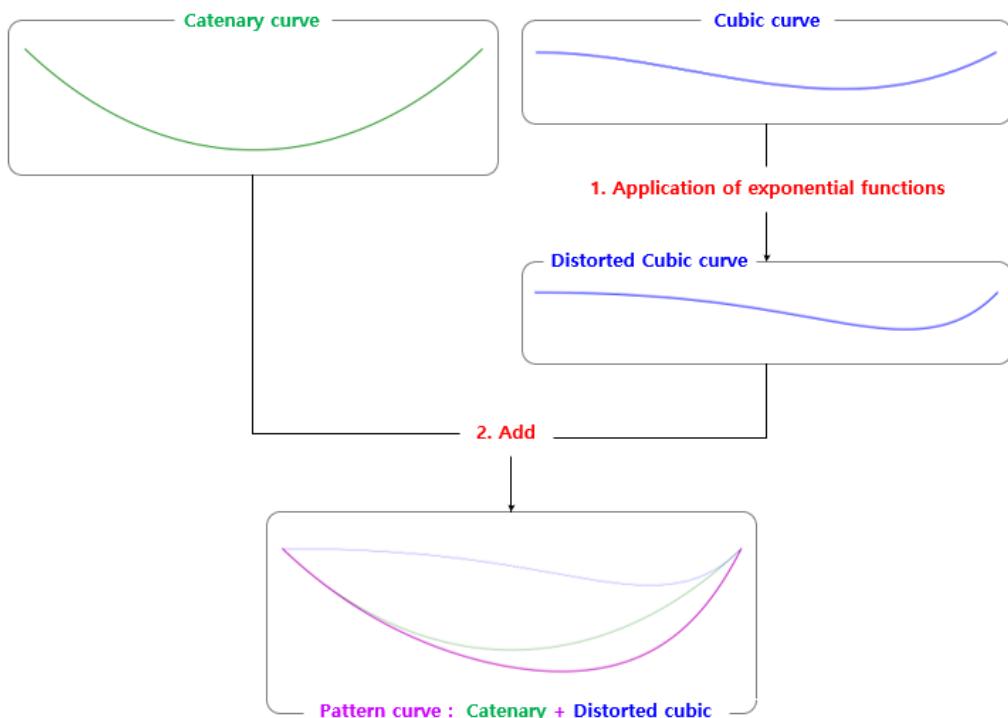
### Definition 7.1. Curva polinomiale cubica

*Una curva definita dalla forma  $y=ax^3 + bx^2 + cx + d$ , dove la potenza più alta della variabile  $x$  è 3 ( $x^3$ ). Può avere fino a due estremi, consentendole di creare curve lisce a forma di S più complesse di una semplice parabola.*

La forma base della curva polinomiale cubica usata in questo rapporto è definita dalla seguente equazione:

$$y = x^2(x - 1) \tag{10}$$

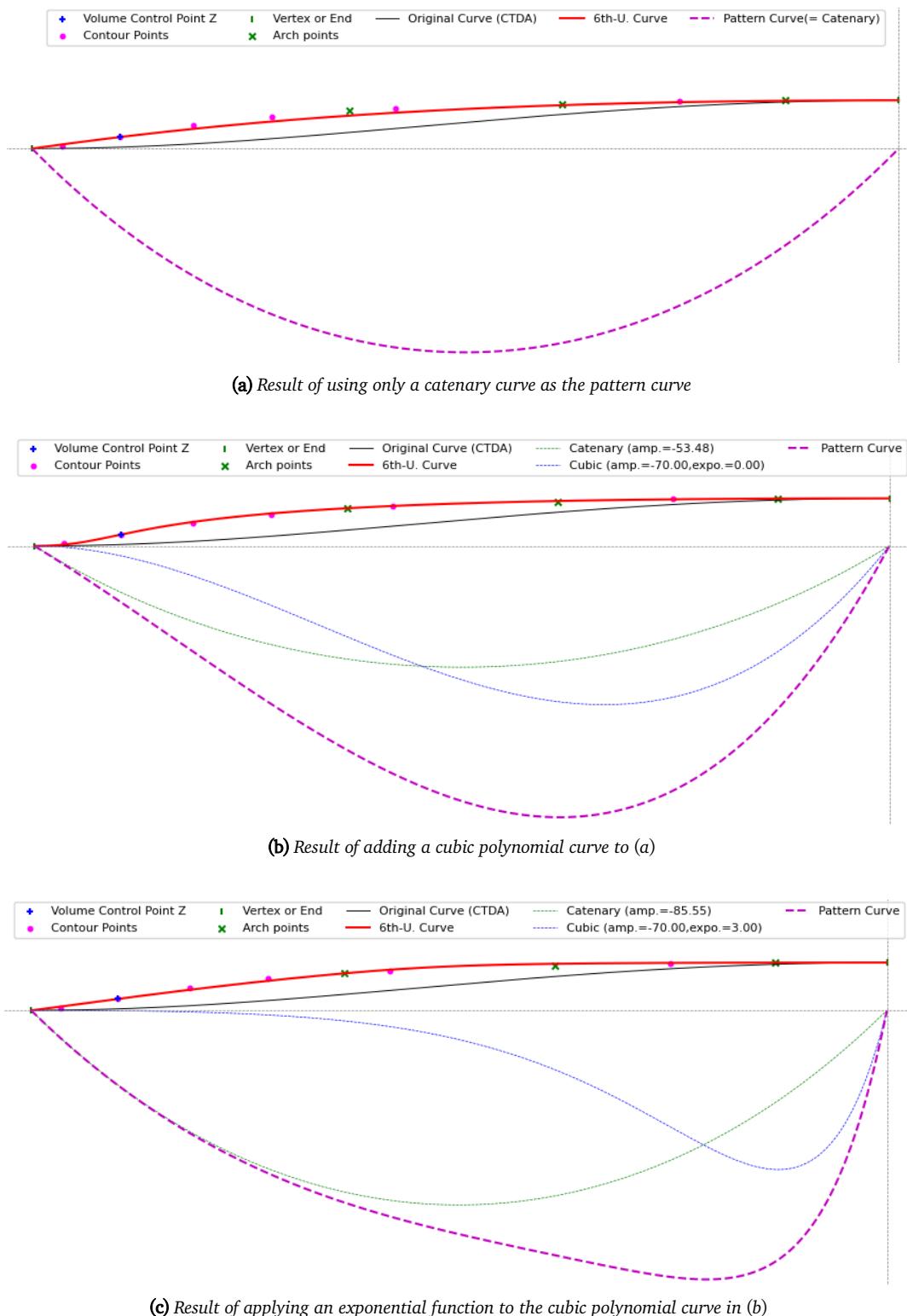
La Curva di Trasformazione finale viene creata sommando una «curva polinomiale cubica distorta esponenzialmente» e una «curva catenaria». (Figura 36) In primo luogo, vengono preparate separatamente una curva catenaria e una curva polinomiale cubica. Quindi, l'asse x della curva polinomiale cubica viene distorto con una funzione esponenziale per trasformarne la forma (regolando la lunghezza del manico). Questa curva polinomiale cubica trasformata viene quindi aggiunta alla curva catenaria preparata per completare la Curva di Trasformazione finale. (Per il metodo di applicazione di una funzione esponenziale alla curva polinomiale cubica, fare riferimento alla Figura 34).



**Figure 36:** Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve

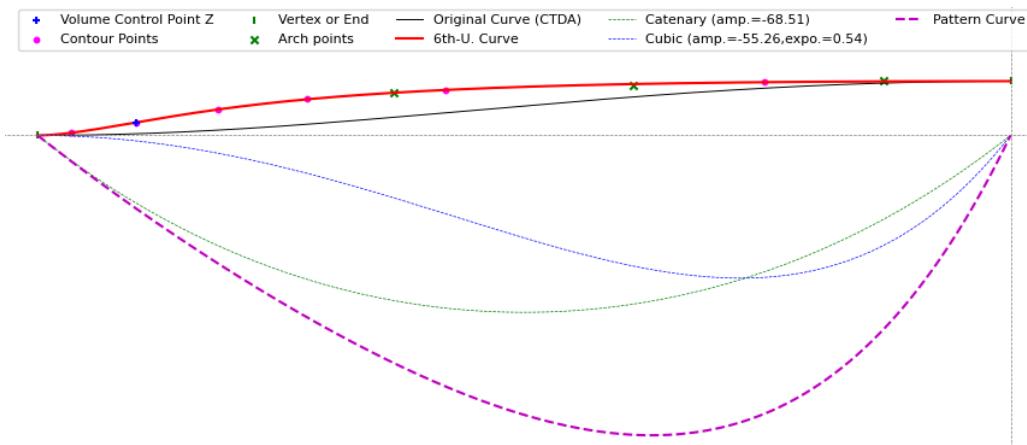
La Figura 37 mostra come la curva di ricostruzione cambia ogni volta che un componente viene applicato alla Curva di Trasformazione. (※ Poiché queste sono figure di esempio, ogni parametro è stato impostato arbitrariamente.)

Rispetto al punto di controllo della pienezza  $Z$ , (a) mostra una pienezza eccessiva verso l'estremo e insufficiente verso l'apice, mentre (b) mostra il contrario. (c) è leggermente più vicina alla curva target rispetto a (a). Sebbene la combinazione delle tre funzioni consenta una regolazione libera della forma della curva di ricostruzione, trovare i parametri ottimali non è facile. In primo luogo, l'ampiezza della curva catenaria viene trovata tramite calcoli iterativi fino a quando la curva di ricostruzione non passa attraverso il punto di controllo della pienezza  $Z$ . Successivamente, l'ampiezza della curva polinomiale cubica e l'esponente della funzione esponenziale devono essere trovati tramite calcoli iterativi, modificando i loro valori fino a quando la curva di ricostruzione non passa attraverso sia il primo che il quarto punto di contorno.



**Figure 37:** Change in the reconstruction curve according to the combination of pattern curve elements

La Figura 38 è il risultato finale dopo aver trovato e applicato i parametri ottimali attraverso i calcoli iterativi descritti sopra. Rispetto alle figure di esempio precedenti, si può vedere che la curva di ricostruzione corrisponde molto bene alle posizioni dei punti di contorno.



**Figure 38:** Final pattern curve combining an exponentially distorted cubic polynomial curve and a catenary curve (Optimized)

Specificando in modo appropriato le posizioni dei punti di controllo della forma e della pienezza e regolando la Curva di Trasformazione in modo che la curva di ricostruzione passi attraverso tutti questi punti, si possono creare con precisione varie forme di curve(arch).

### 7.3 Sequenza per la Creazione della 6<sup>a</sup> Curva(arch)

La sequenza per ricreare la 6<sup>a</sup> curva(arch) è la seguente:

1. Specificare le posizioni del punto di controllo della pienezza  $Z$  e dei punti di controllo della forma superiore/inferiore.
2. Generare una CTDA con la stessa larghezza e altezza della curva(arch) da ricostruire, che fungerà da curva originale.
3. Preparare la curva catenaria e la curva polinomiale cubica da utilizzare per la Curva di Trasformazione.
4. Trovare i valori ottimali aumentando gradualmente da 0 l'esponente da applicare alla curva polinomiale cubica e le ampiezze di ciascuna curva (polinomiale cubica, catenaria), in modo che la curva di ricostruzione passi attraverso il punto di controllo della pienezza e entrambi i punti di controllo della forma superiore e inferiore.
5. Completare la Curva di Trasformazione finale applicando il valore dell'esponente e i due valori di ampiezza trovati.
6. Generare la curva(arch) finale trasformando la CTDA creata al punto 2 utilizzando la Curva di Trasformazione completata.

## 8 Ricostruzione della bombatura di Stradivari

Utilizzando i metodi descritti finora, questo rapporto ricostruirà ora le curve(arch) dei Modelli A, B, C e D. Tuttavia, a causa delle sue caratteristiche uniche, la 6<sup>a</sup> curva(arch) viene presentata separatamente. Le tabelle successive, dalla Tabella 6 alla 5, riassumono tutte le informazioni pertinenti, inclusi i valori dei parametri e i tipi di curva(arch) utilizzati nella ricostruzione.

Le curve(arch) n. 1-5 vengono ricostruite dividendole in tavola e fondo, e poi in metà sinistra (lato catena) e destra (lato anima). La ricostruzione viene tentata prima utilizzando una CHTA o una CETA. Solo se ciò è impossibile, viene creata una curva di approssimazione (nCHTAce, nCETAice, ecc.) utilizzando una Curva di Trasformazione. La posizione del punto di controllo della pienezza  $Z$  è stata standardizzata alla seconda linea di contorno per tutti i casi.

La 6<sup>a</sup> curva(arch) viene ricostruita dividendola in parti superiore e inferiore in base all'apice e viene creata trasformando una CTDA con una Curva di Trasformazione (CTDAcec). Il punto di controllo della pienezza  $Z$  è stato standardizzato alla seconda linea di contorno, e il punto di controllo della forma inferiore alla prima linea di contorno. Per il punto di controllo della forma superiore, è stato scelto il punto più adatto tra la 5a, 6a e 7a linea di contorno per i Modelli A, B e C, mentre è stata utilizzata la 4a linea di contorno per il Modello D.

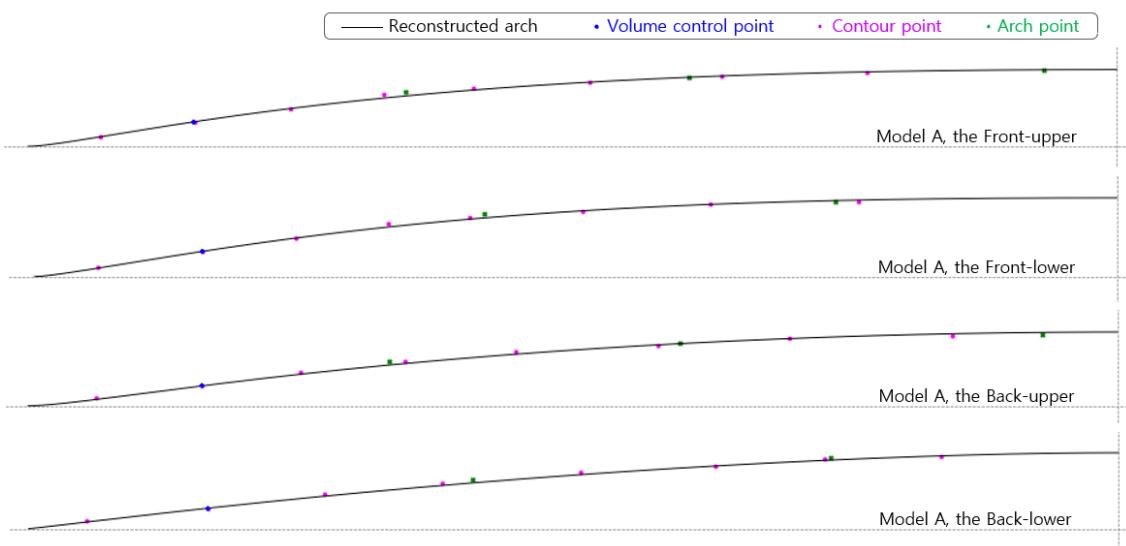
La maggiore difficoltà nel ricreare la 6<sup>a</sup> curva(arch) è creare una curva che passi attraverso tutti e tre i punti di controllo (il punto di controllo della pienezza e i punti di controllo della forma superiore/inferiore). Se questi punti sono sparsi e non giacciono su una curva liscia, è impossibile creare una curva di ricostruzione liscia che passi attraverso tutti loro. Ad esempio, un singolo punto di controllo della forma potrebbe sporgere in modo significativo. Se le posizioni dei punti di riferimento sono irregolari in questo modo, una curva(arch) liscia che passa per tutti i punti non può esistere. Anche se si forza una curva a passare per tutti i punti, non sarà una curva(arch) liscia ma una forma distorta.

In particolare per i Modelli A, B e C, come confermato in precedenza, le superfici delle bombature sono irregolari. In questo stato, designare semplicemente la prima, la seconda e la quarta linea di contorno come rispettivi punti di controllo rende la ricostruzione quasi impossibile. Pertanto, è necessario un certo aggiustamento quando la curva originale non è liscia.

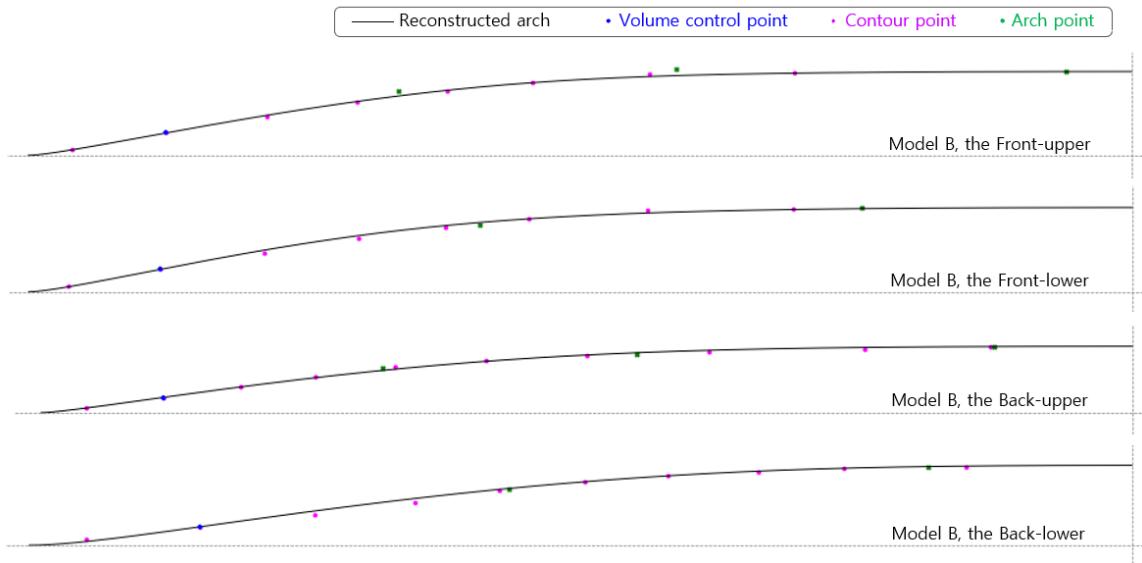
In tali casi, si presume che la posizione del punto di controllo della pienezza (seconda linea di contorno) sia accurata. Invece, i due punti di controllo della forma devono essere scelti con cura in modo che la curva di ricostruzione corrisponda il più possibile all'originale. Il punto di controllo della forma superiore viene selezionato tra la 3a e la 7a linea di contorno per trovare quello che produce la curva più naturale. Per il punto di controllo della forma inferiore, si tenta prima con la prima linea di contorno. Se la generazione della curva è impossibile, la sua altezza deve essere regolata a poco a poco per trovare la posizione ottimale in cui una curva può essere creata.

Le Figure dalla 39 alla 42 mostrano le curve(arch) della 6<sup>a</sup> curva(arch) ricostruite insieme ai punti pertinenti. Prendiamo come esempio la parte superiore della tavola del Modello A (Figura 39). Questa curva(arch) è stata ricostruita sulla base della seconda linea di contorno (punto di controllo della pienezza), della prima linea di contorno (punto di controllo della forma inferiore) e della sesta linea di contorno (punto di controllo della forma superiore). La figura mostra che, rispetto alla curva ricostruita, la quarta linea di contorno e il punto di posizione della prima curva(arch) sono sollevati. Visivamente, le posizioni di questi due punti non sembrano logiche. Se la quarta linea di contorno sollevata fosse stata utilizzata come punto di controllo della forma superiore invece della sesta, la parte superiore della curva di ricostruzione sarebbe stata complessivamente gonfiata, aumentando la differenza dall'originale.

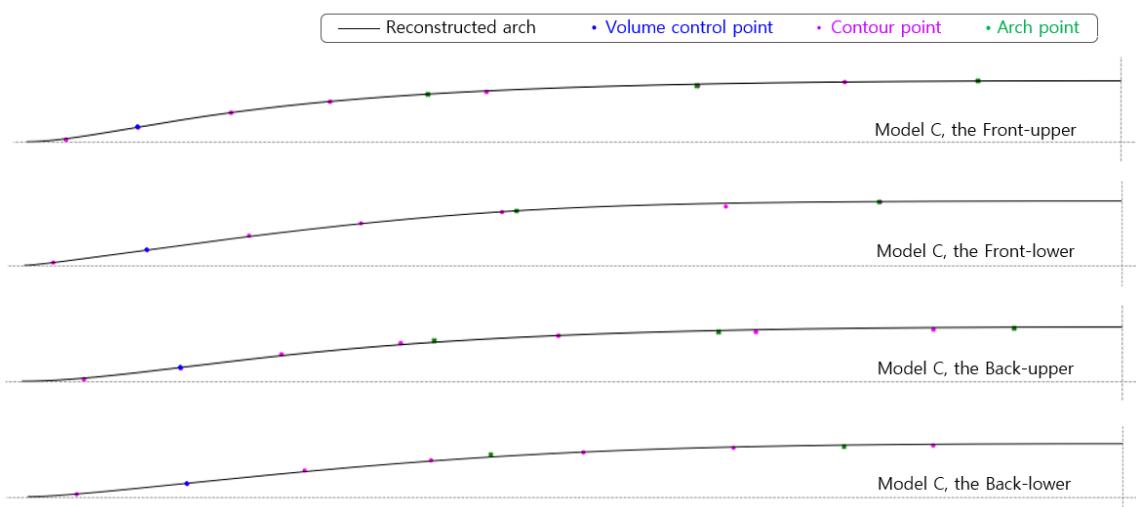
Anche la parte inferiore della curva(arch) del fondo del Modello B è un buon esempio (Figura 40). Inizialmente, sono state usate come punti di controllo la 2a, 1a e 7a linea di contorno, ma la generazione della curva è fallita perché la posizione della prima linea di contorno era troppo alta. Pertanto, dopo aver abbassato iterativamente l'altezza del punto di controllo della forma inferiore, una curva ha potuto finalmente essere creata solo dopo una riduzione di 0.4mm. La figura mostra che la curva di ricostruzione passa sotto la prima linea di contorno. Allo stesso tempo, la terza e la quarta linea di contorno sono ben al di sotto della curva di ricostruzione. Ciò implica che o la posizione del punto di controllo della pienezza è errata, o potrebbero essere errate le posizioni della 3a e 4a linea di contorno. Tuttavia, poiché attualmente è impossibile sapere quale sia corretta, la ricostruzione è proceduta secondo il principio che «il punto di controllo della pienezza è la seconda linea di contorno».



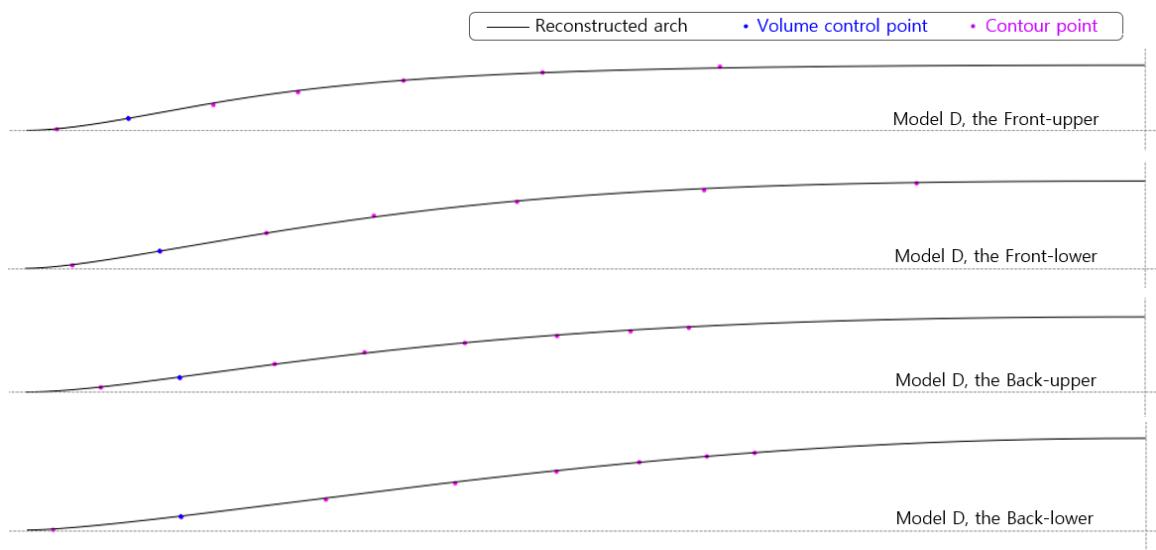
**Figure 39:** Model A, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 40:** Model B, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)



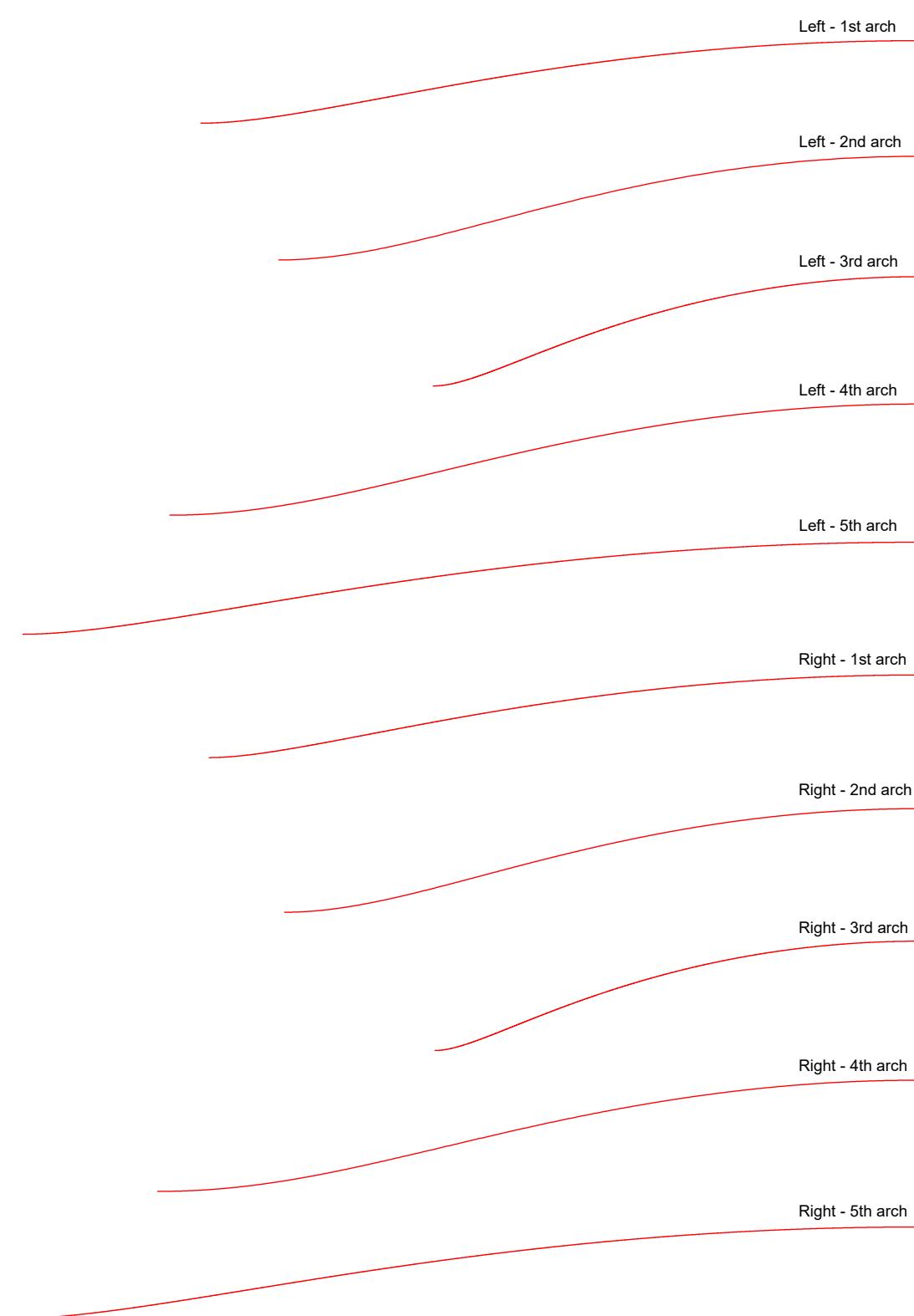
**Figure 41:** Model C, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)



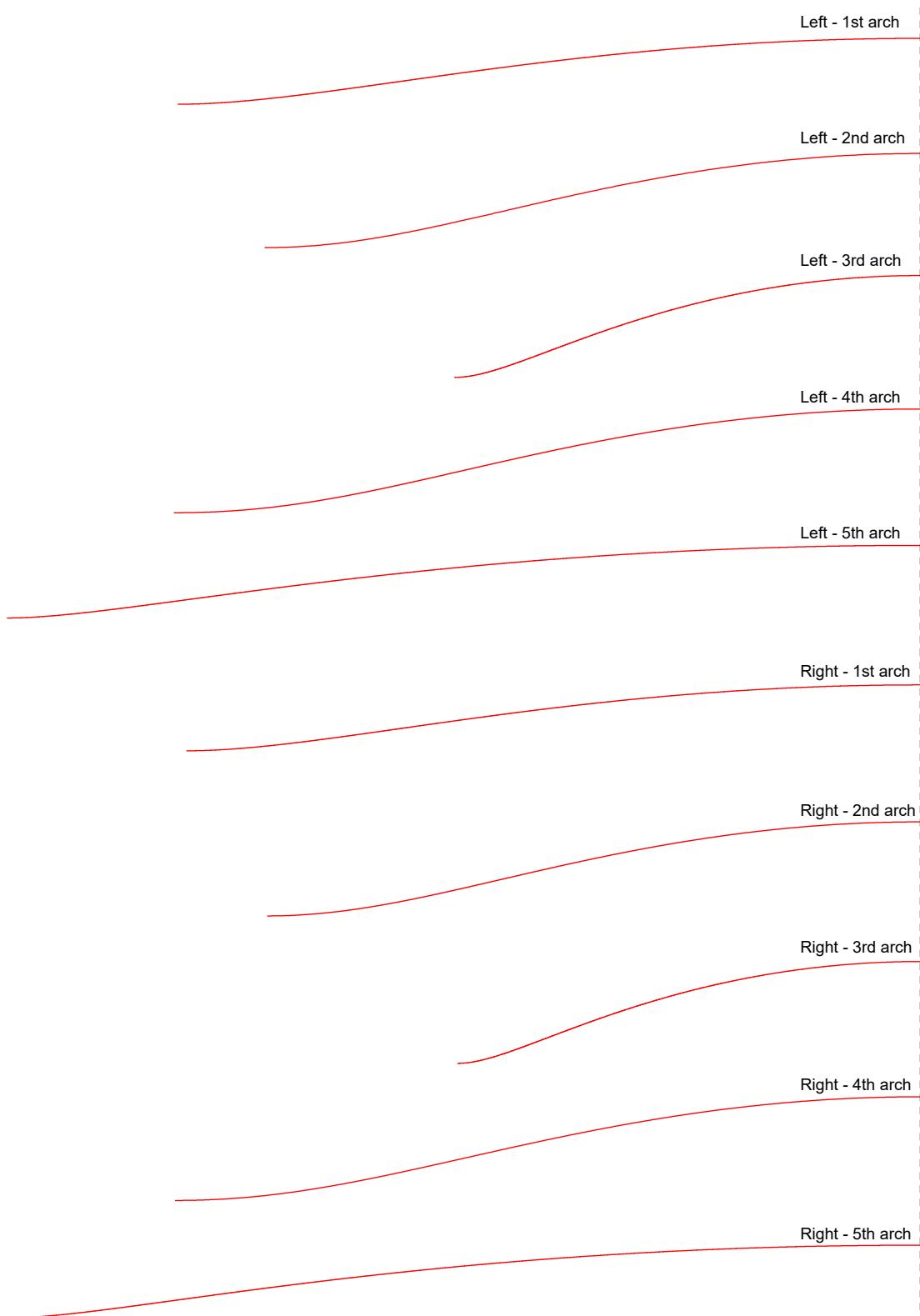
**Figure 42:** Model D, 6th Arch: Model points and reconstruction curve (Front/Back, Upper/Lower parts)

## 8.1 Risultati della Ricostruzione

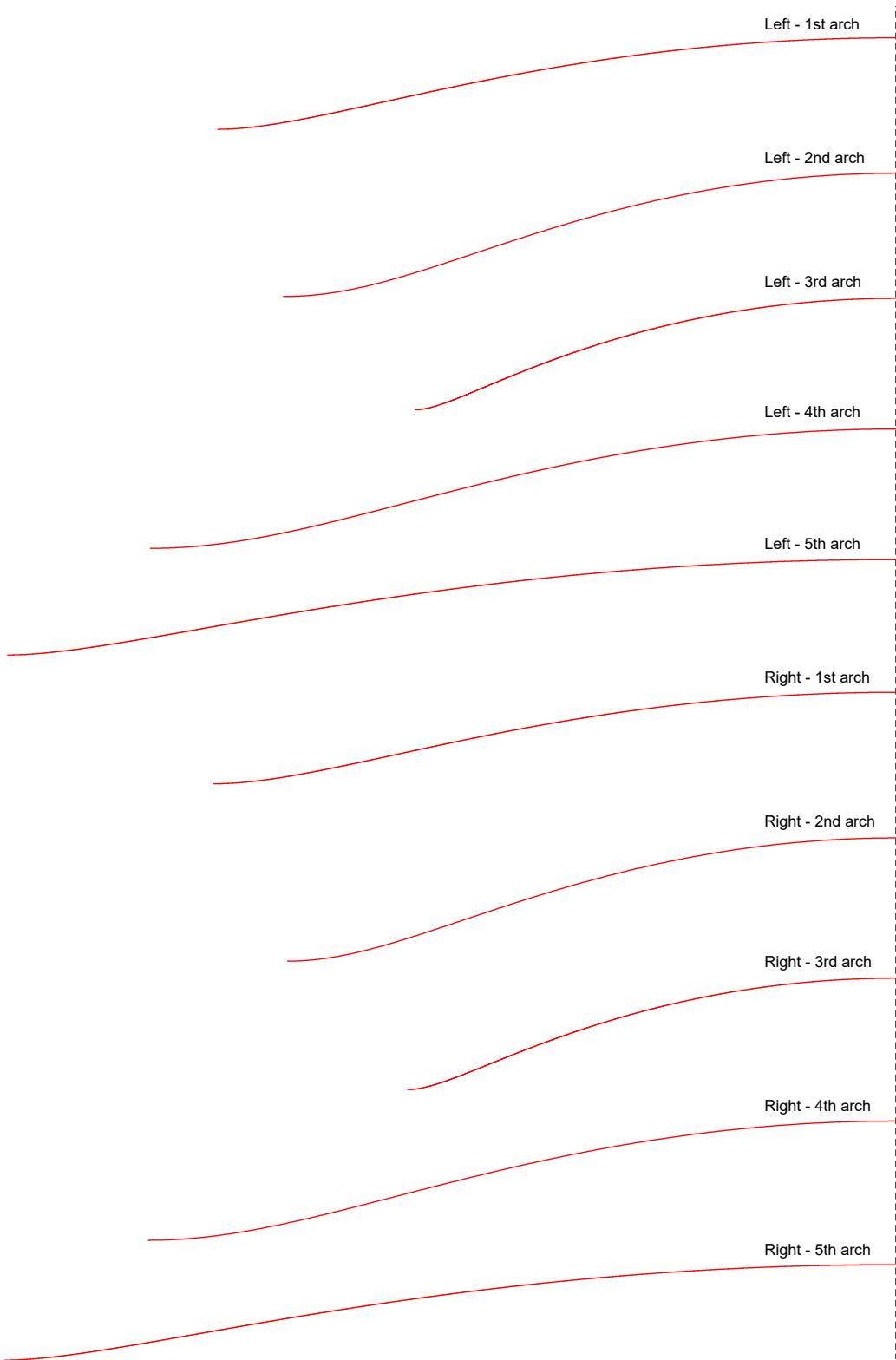
Le Figure dalla 43 alla 54 mostrano i risultati finali della ricostruzione per tutte le curve(arch) dei modelli.



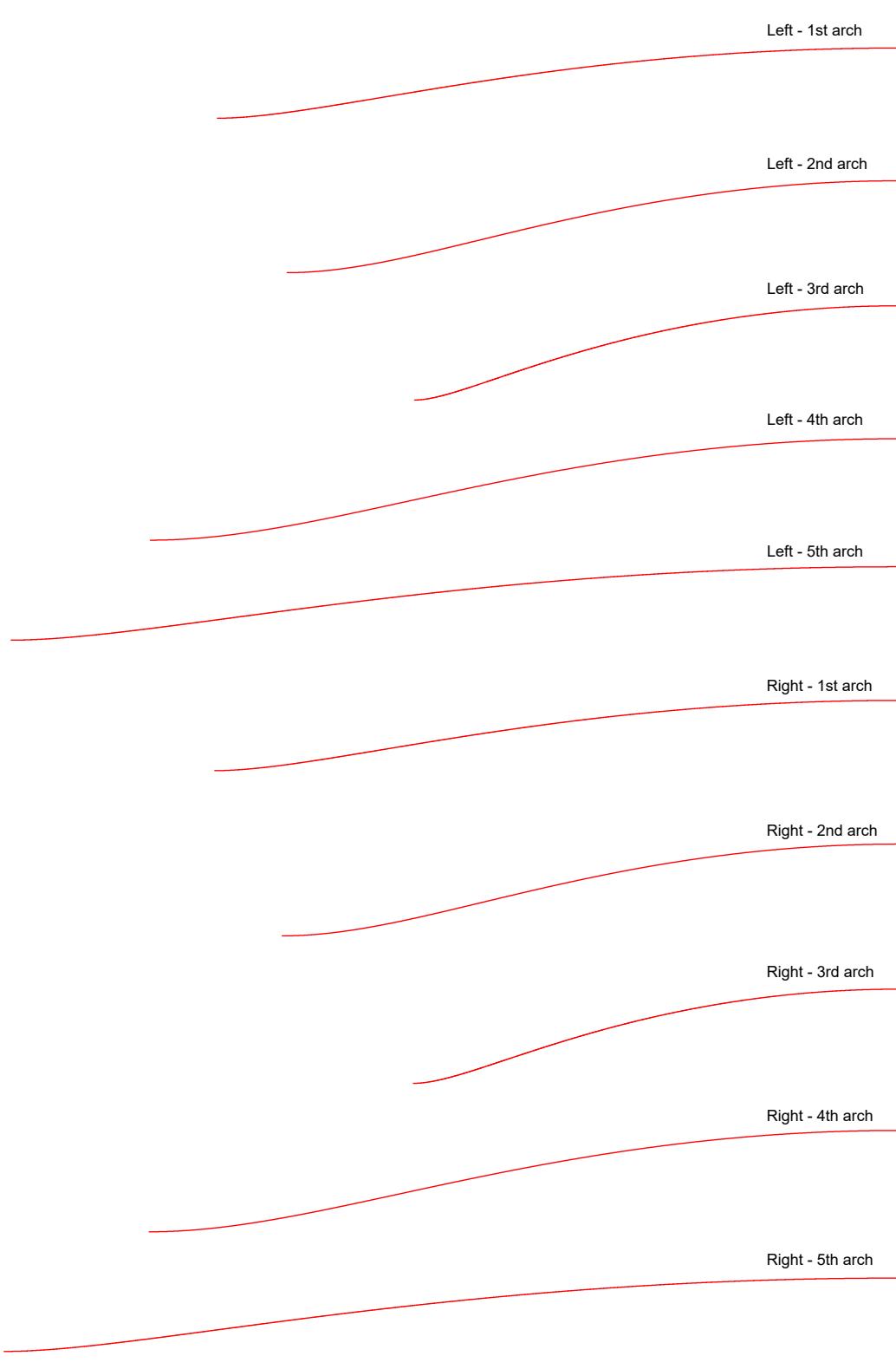
**Figure 43:** Model A, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



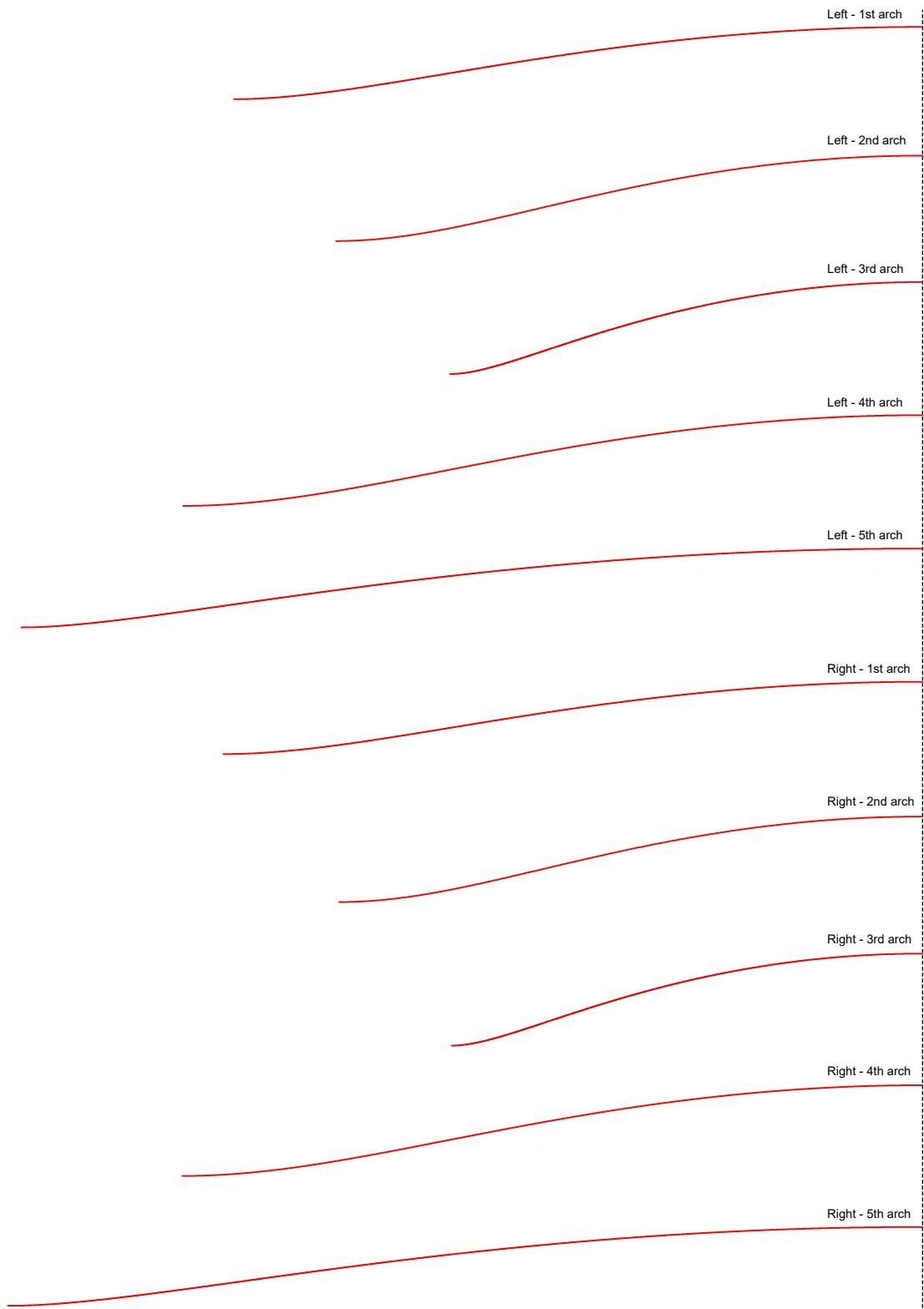
**Figure 44:** Model A, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



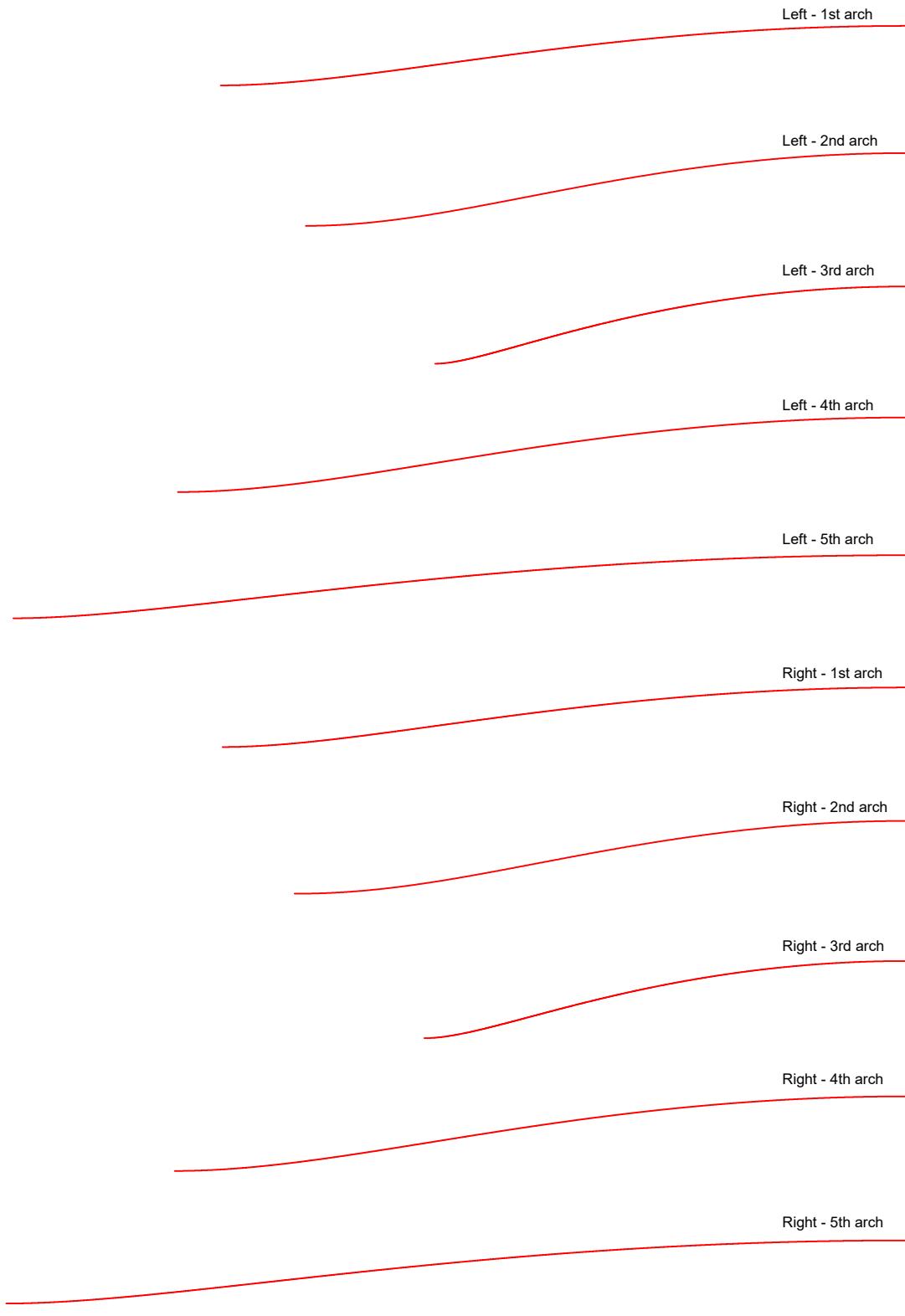
**Figure 45:** Model B, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



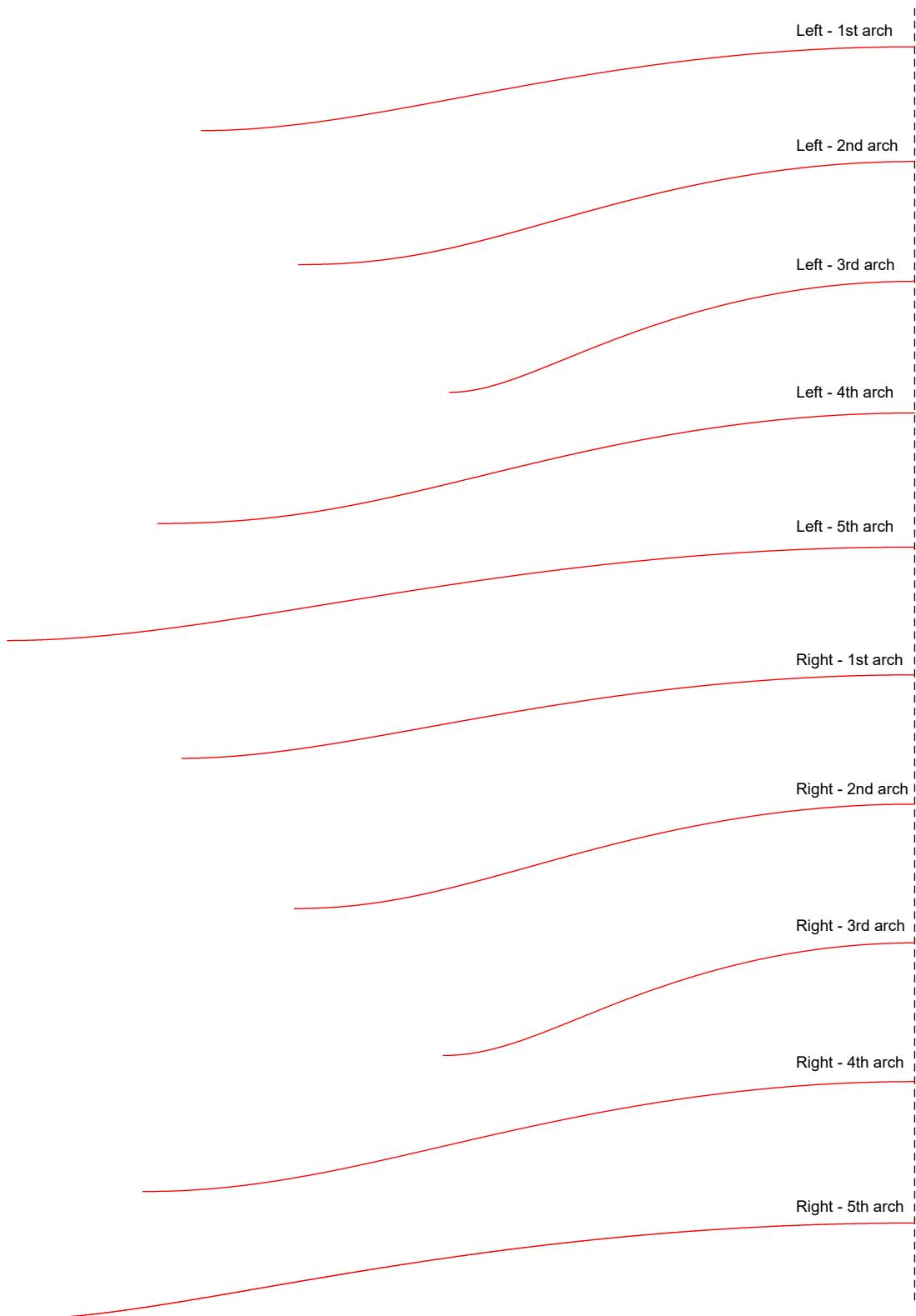
**Figure 46:** Model B, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



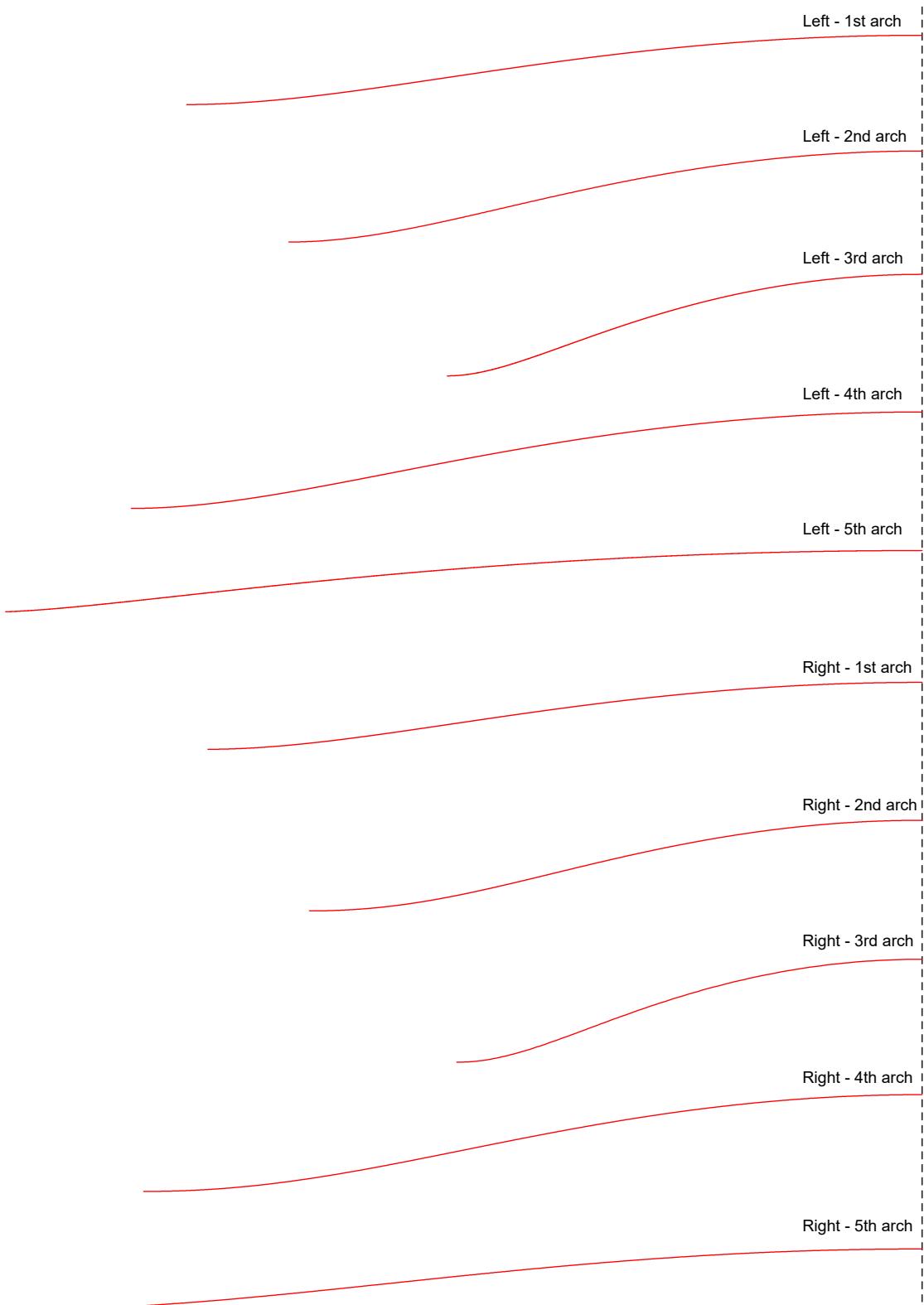
**Figure 47:** Model C, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



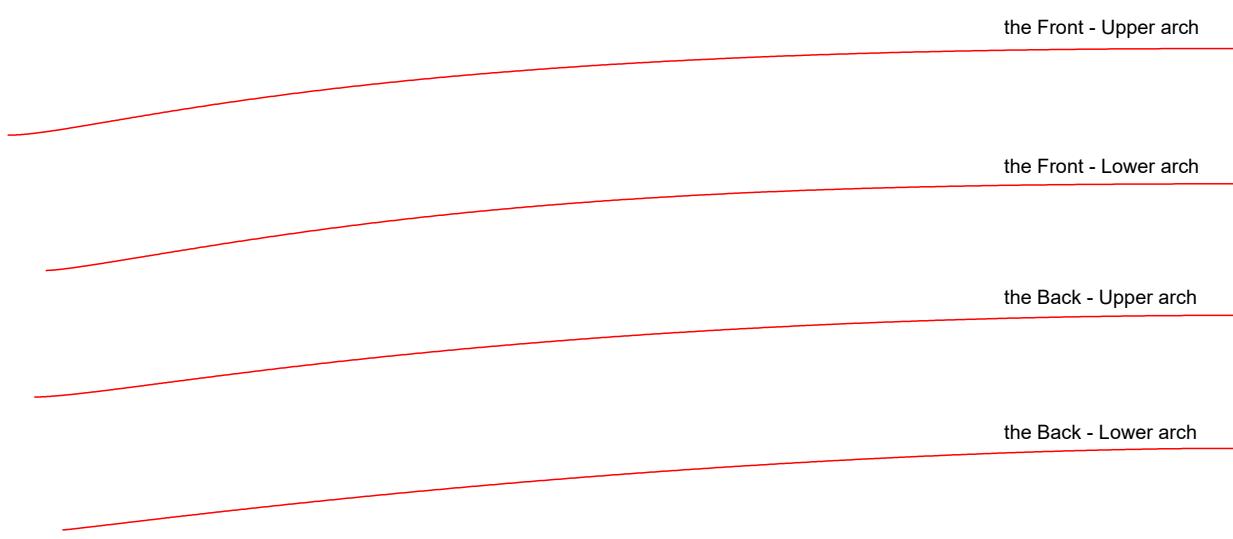
**Figure 48:** Model C, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



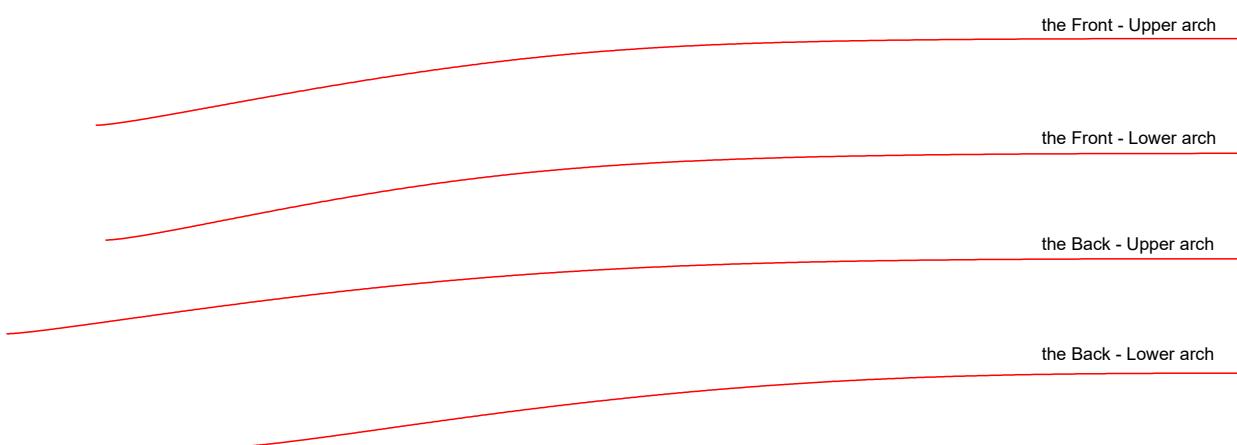
**Figure 49:** Model D, Front arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



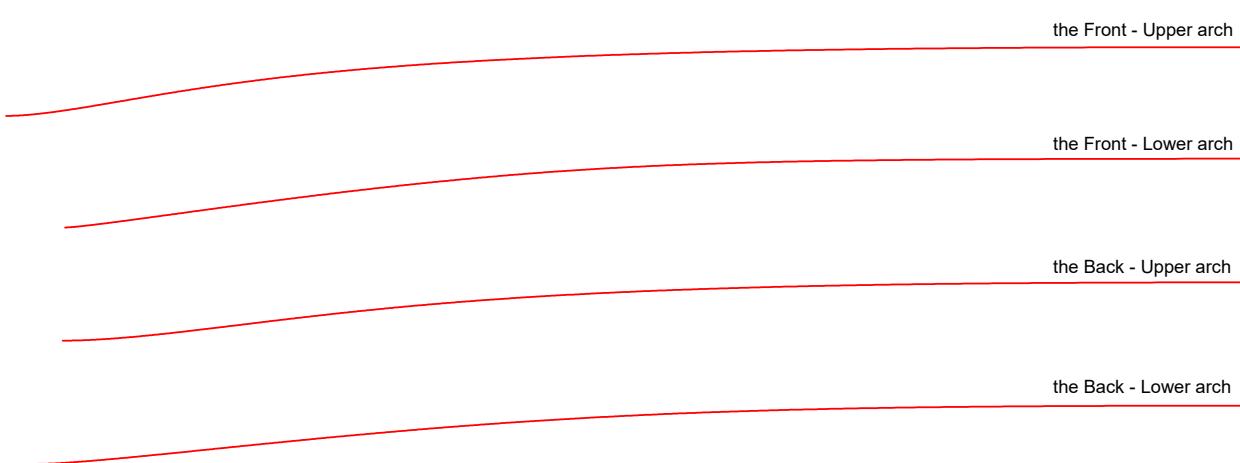
**Figure 50:** Model D, Back arches no. 1-5 reconstruction results (Left/Right)



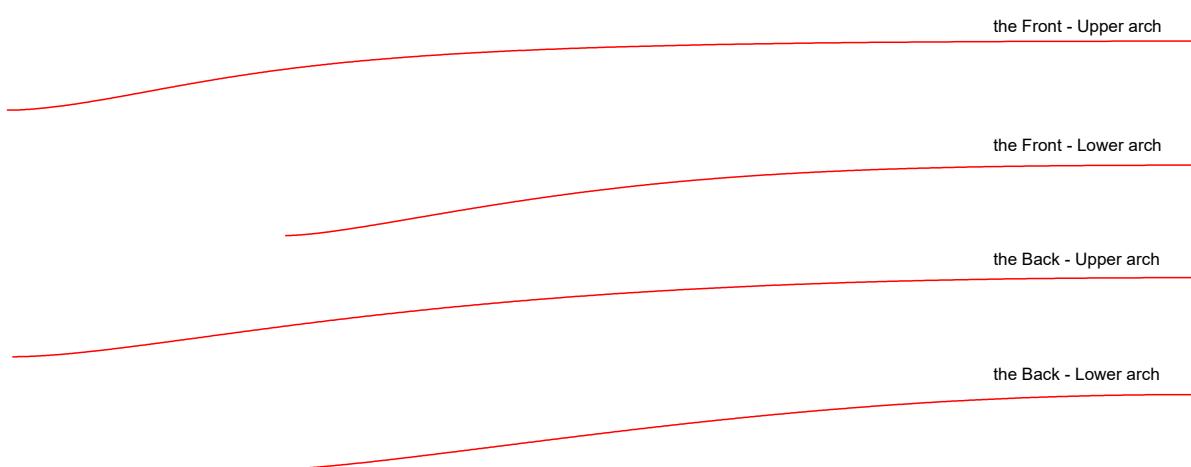
**Figure 51:** Model A, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 52:** Model B, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 53:** Model C, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 54:** Model D, 6th arch reconstruction results (Front/Back, Upper/Lower parts)

## 8.2 Analisi dei Risultati

Questa sezione analizzerà e valuterà le curve(arch) ricostruite sulla base di dati provenienti da immagini, parametri, pienezza ed errori. Attraverso questa analisi, questo rapporto fornirà una comprensione più dettagliata delle caratteristiche della bombatura di Stradivari e confermerà l'affidabilità del metodo di ricostruzione.

### 8.2.1 Analisi delle Immagini

Le figure seguenti, dalla [55](#) alla [66](#), mostrano le curve(arch) ricostruite e le curve(arch) del modello sovrapposte. Questo rapporto confronterà visivamente queste figure per analizzare le caratteristiche per modello e per posizione (ad es., 1<sup>a</sup> curva(arch), 2<sup>a</sup> curva(arch)). Nelle figure, la linea rossa rappresenta la curva(arch) ricostruita e la linea nera rappresenta la curva(arch) del modello.

Confrontando le due curve(arch), l'irregolarità e la deformazione della curva(arch) del modello diventano chiaramente visibili, rendendo facile identificare i problemi del modello. Al contrario, questo rende anche più facile giudicare l'affidabilità della curva(arch) ricostruita. La maggior parte dei liutai sarà probabilmente in grado di determinare da questo solo confronto se la curva di ricostruzione può essere utilizzata nella costruzione di strumenti reali.

\* Modello A - Tavola (Figura [55](#)): Nella 1<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch) del modello, l'area vicino alla prima linea di contorno è innaturalmente sollevata, mentre la curva(arch) ricostruita mostra una curva liscia. La parte centrale della 2<sup>a</sup> curva(arch) del modello sporge, ma la curva(arch) ricostruita è liscia. La 3<sup>a</sup> curva(arch) del modello ha il problema di scendere bruscamente dall'apice, ma la curva(arch) ricostruita scende dolcemente. Per la 4<sup>a</sup> curva(arch), le due curve sono molto simili, tranne per il fatto che la parte centrale della curva(arch) del modello sporge leggermente.

\* Modello A - Fondo (Figura [56](#)): Similmente alla tavola, l'area vicino alla prima linea di contorno della 1<sup>a</sup> curva(arch) del modello è innaturalmente sollevata. Anche la 3<sup>a</sup> curva(arch) mostra una tendenza simile alla tavola. Nelle curve(arch) 2<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup>, ci sono punti in cui la curva(arch) del modello si gonfia leggermente.

\* Modello B - Tavola (Figura [57](#)): Le due curve della 1<sup>a</sup> curva(arch) sono molto simili. La parte centrale della 2<sup>a</sup> curva(arch) del modello è bruscamente infossata, mentre la curva(arch) ricostruita è liscia. Nella 3<sup>a</sup> curva(arch), la parte superiore del modello sporge e la parte inferiore è infossata. Nella 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch), la parte centrale del modello cede su un'ampia area.

\* Modello B - Fondo (Figura [58](#)): La parte centrale della 5<sup>a</sup> curva(arch) del modello è innaturalmente infossata. La curva(arch) ricostruita ripristina questa parte con una curva liscia. Per la 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> curva(arch), le due curve sono molto simili.

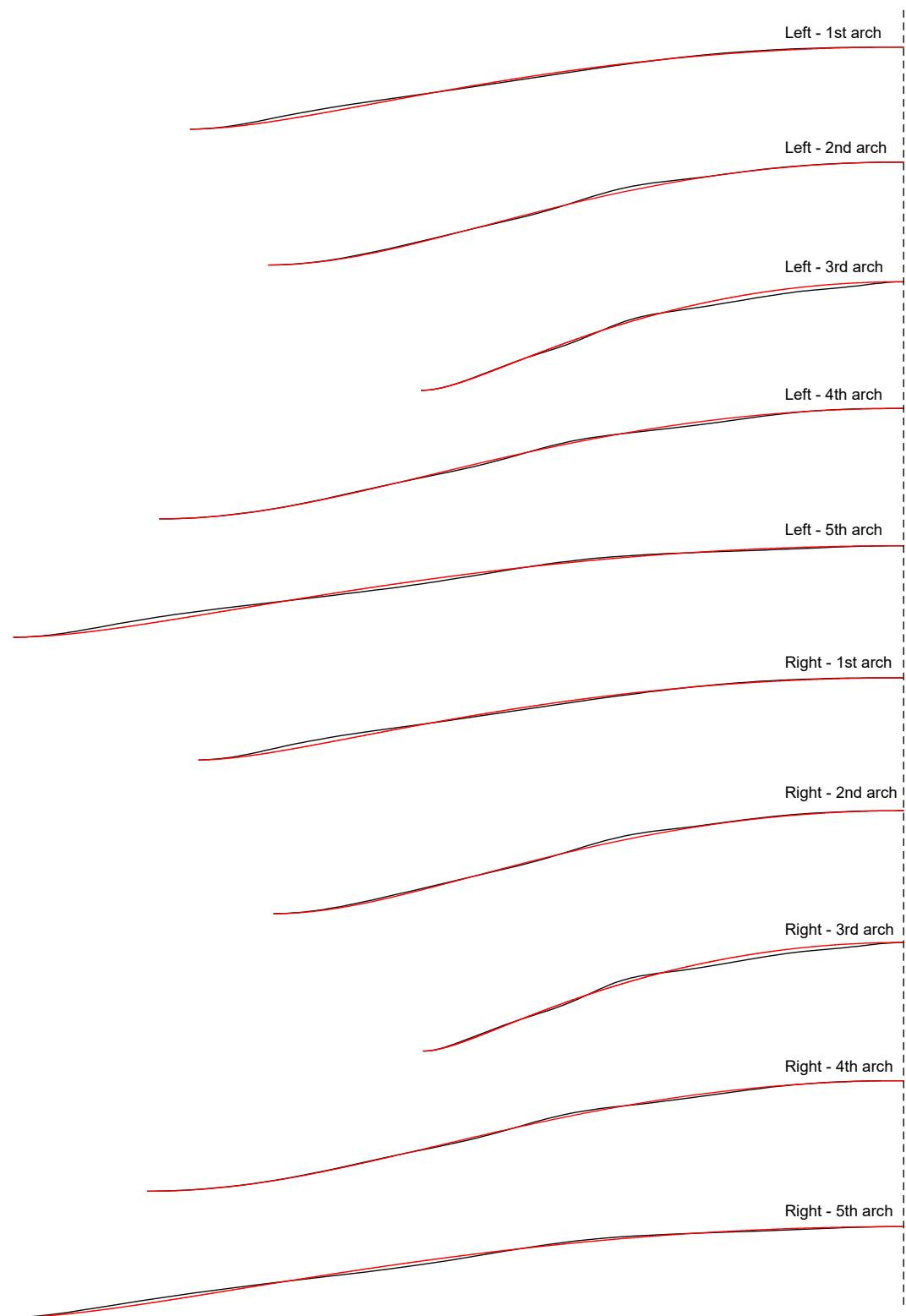
\* Modello C - Tavola (Figura 59): Forse a causa delle maggiori dimensioni dello strumento, ci sono meno irregolarità rispetto ai Modelli A e B. Le due curve sono molto simili per la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch), mentre la parte centrale della 3<sup>a</sup> curva(arch) del modello è leggermente più alta.

\* Modello C - Fondo (Figura 60): In tutte le curve(arch), la parte centrale della curva(arch) del modello è generalmente leggermente più alta. Ciò è degno di nota in quanto non si tratta di un'irregolarità locale. Questo potrebbe essere risolto spostando il punto di controllo della pienezza nell'area centrale, ma la posizione del punto di controllo non è stata cambiata per mantenere la coerenza nella ricostruzione. Questa potrebbe essere una caratteristica unica di questo strumento.

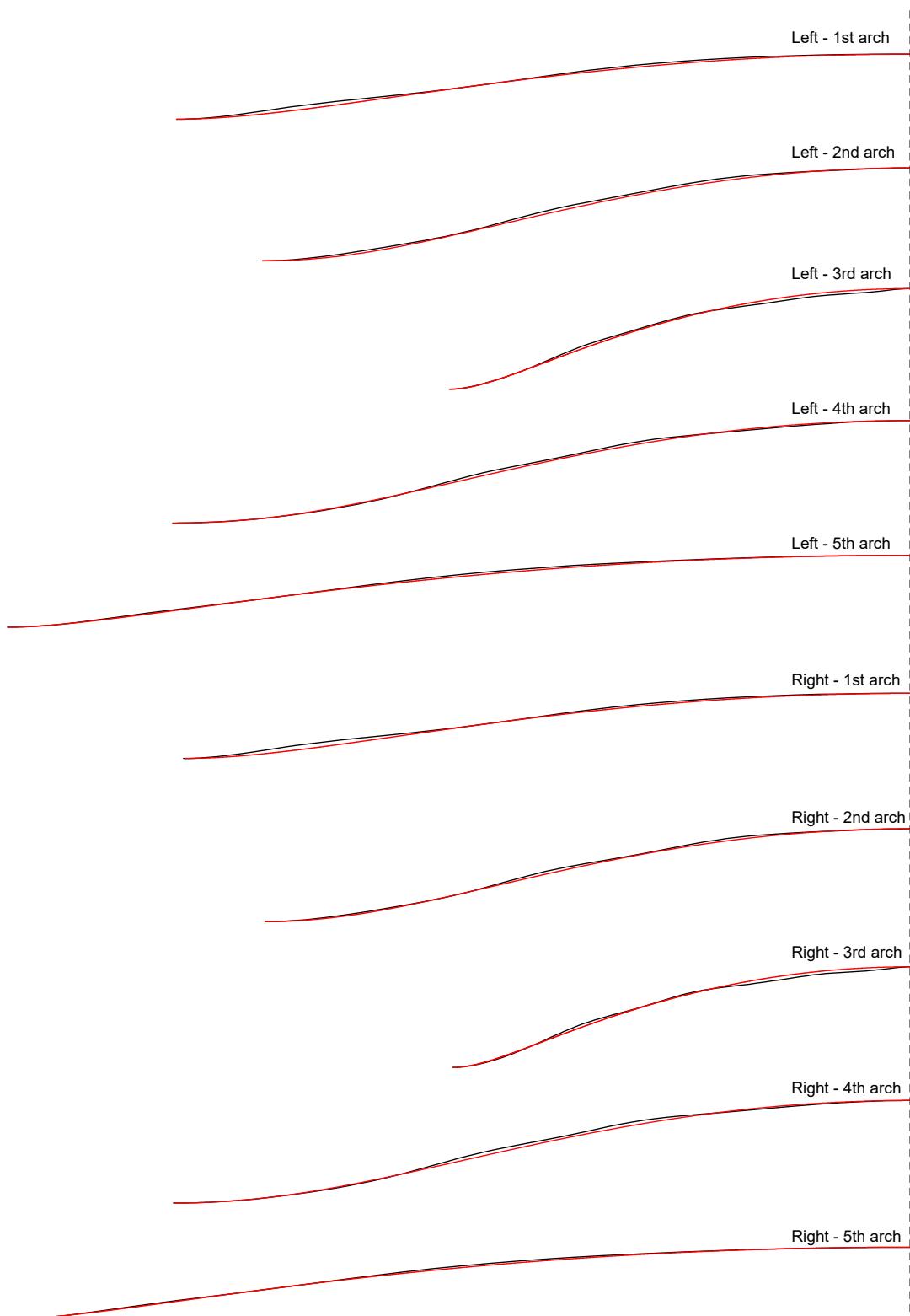
\* Modello D - Tavola (Figura 61): L'errore appare maggiore rispetto ad altri modelli, il che si presume sia dovuto alla deformazione della tavola causata dall'anima. Infatti, le parti superiori delle curve(arch) di sinistra (lato catena) sono per lo più più basse, mentre le parti superiori delle curve(arch) di destra (lato anima) sono per lo più più alte. La forma al momento della costruzione sarebbe stata una forma intermedia tra queste due. Se la ricostruzione fosse basata sulla curva media delle curve(arch) sinistra e destra, l'errore sarebbe molto più piccolo.

\* Modello D - Fondo (Figura 62): Anche il fondo mostra una distorsione dovuta all'anima, ma la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> curva(arch) sono eccezioni in cui le due curve quasi coincidono. Ciò sembra dovuto al fatto che l'area corrispondente del fondo è più rigida e meno influenzata dalle forze strutturali rispetto alla tavola. Anche in altri modelli, la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> curva(arch) del fondo tendono a mostrare una maggiore somiglianza tra il modello e la curva di ricostruzione rispetto ad altre aree.

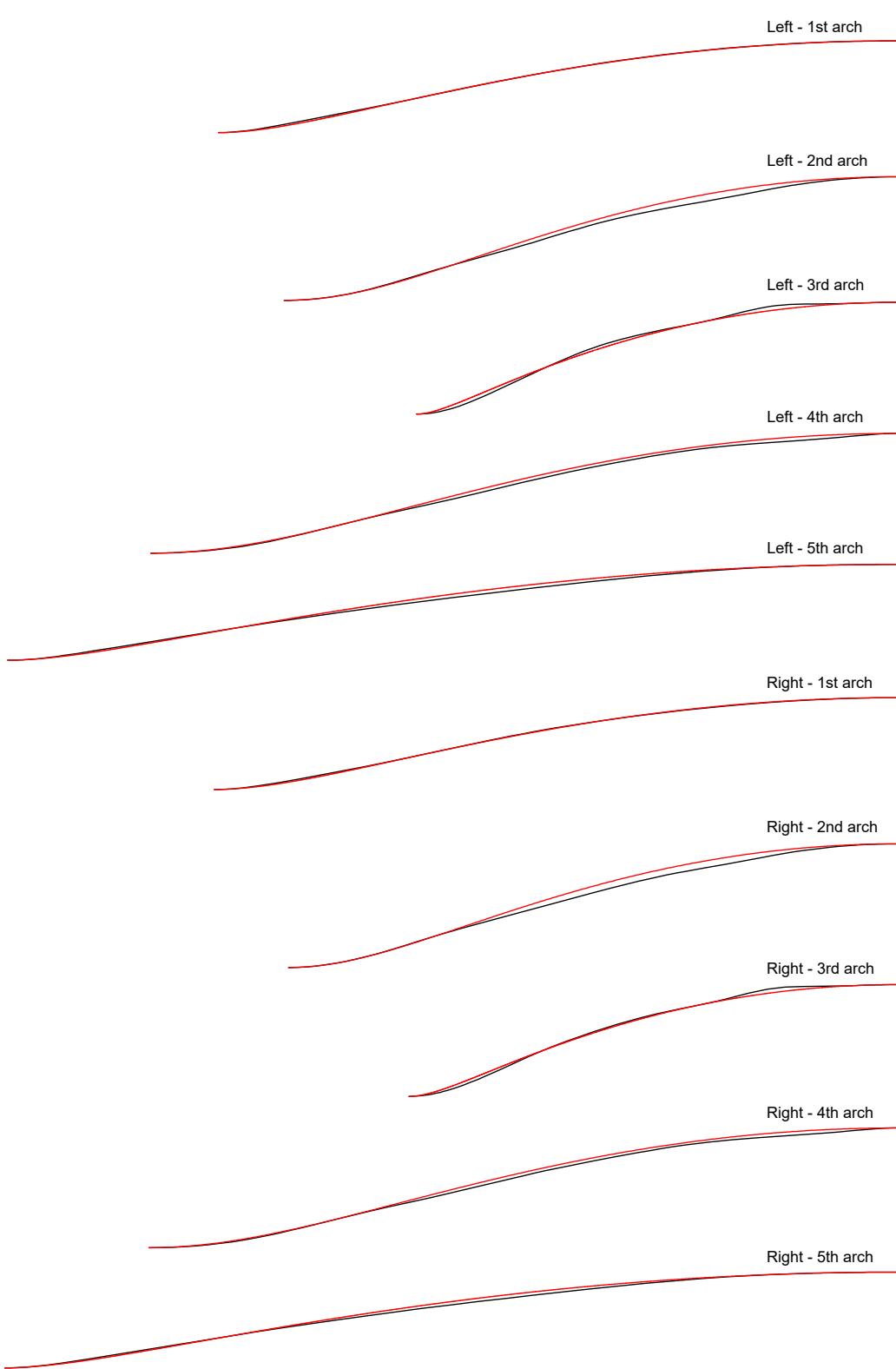
\* 6<sup>a</sup> Curva(arch) (Figura 63~66): I Modelli A, B e C hanno molte irregolarità nell'originale, ma la curva(arch) ricostruita le corregge dolcemente. Al contrario, per il Modello D, che è stato creato da una scansione TC, le curve(arch) originali e ricostruite sono molto simili. Ciò indica che se i dati originali sono accurati, questo metodo di ricostruzione dimostra un'accuratezza molto elevata. In particolare per il Modello A, come si vede nella Figura 39, si può confermare che la 1<sup>a</sup> e la 5<sup>a</sup> curva(arch) del modello sono notevolmente sollevate.



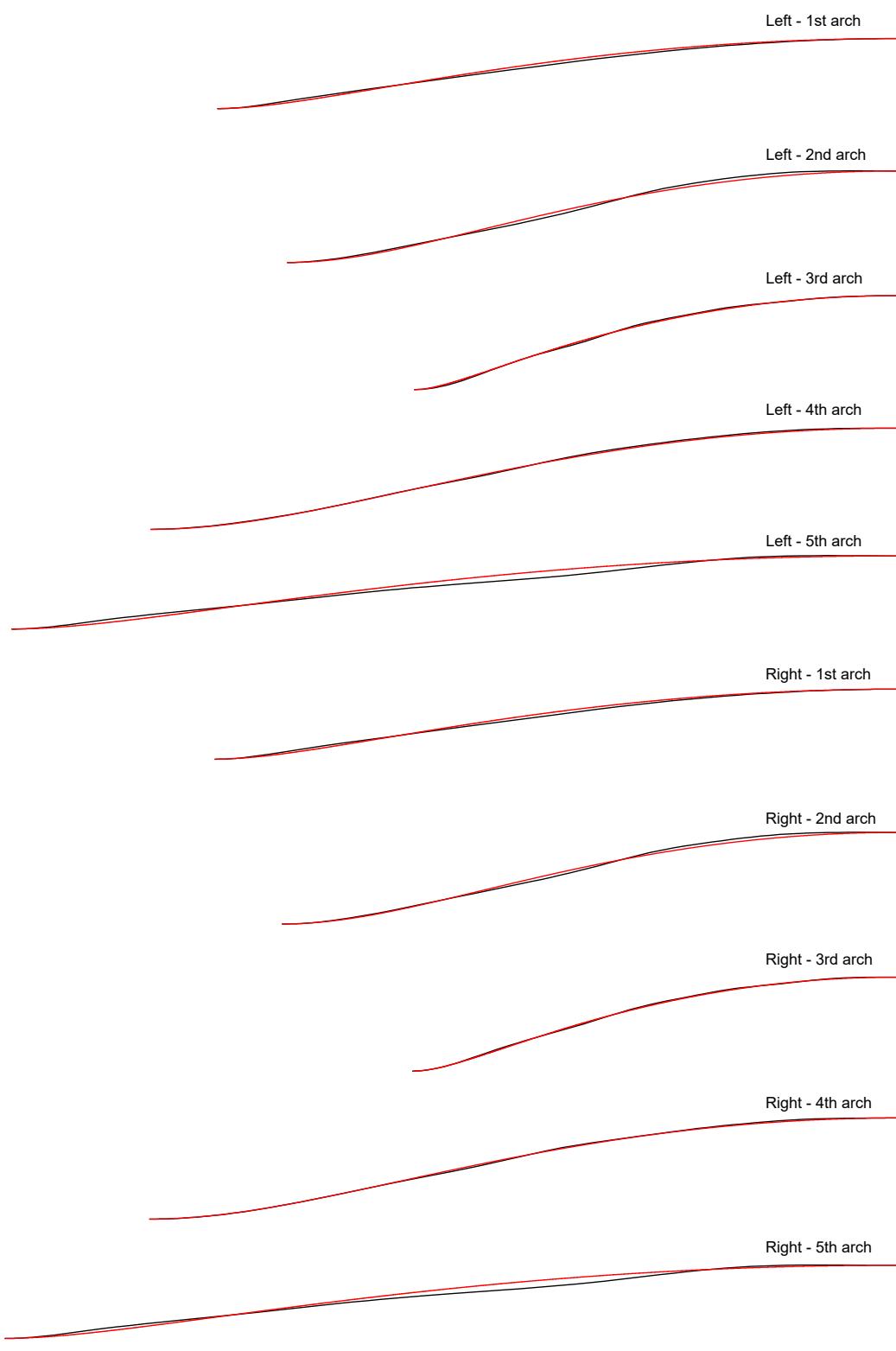
**Figure 55:** Model A, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



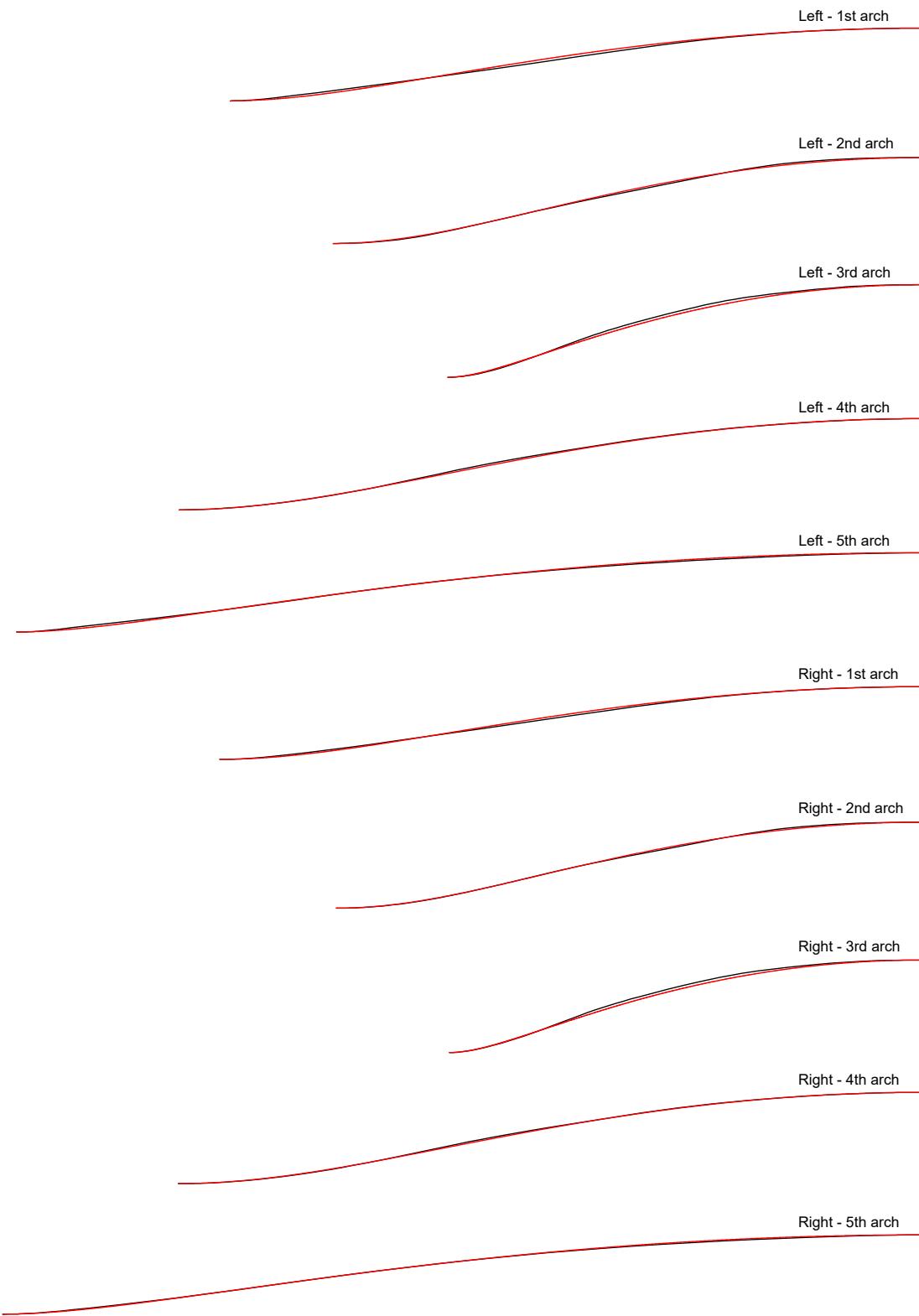
**Figure 56:** Model A, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



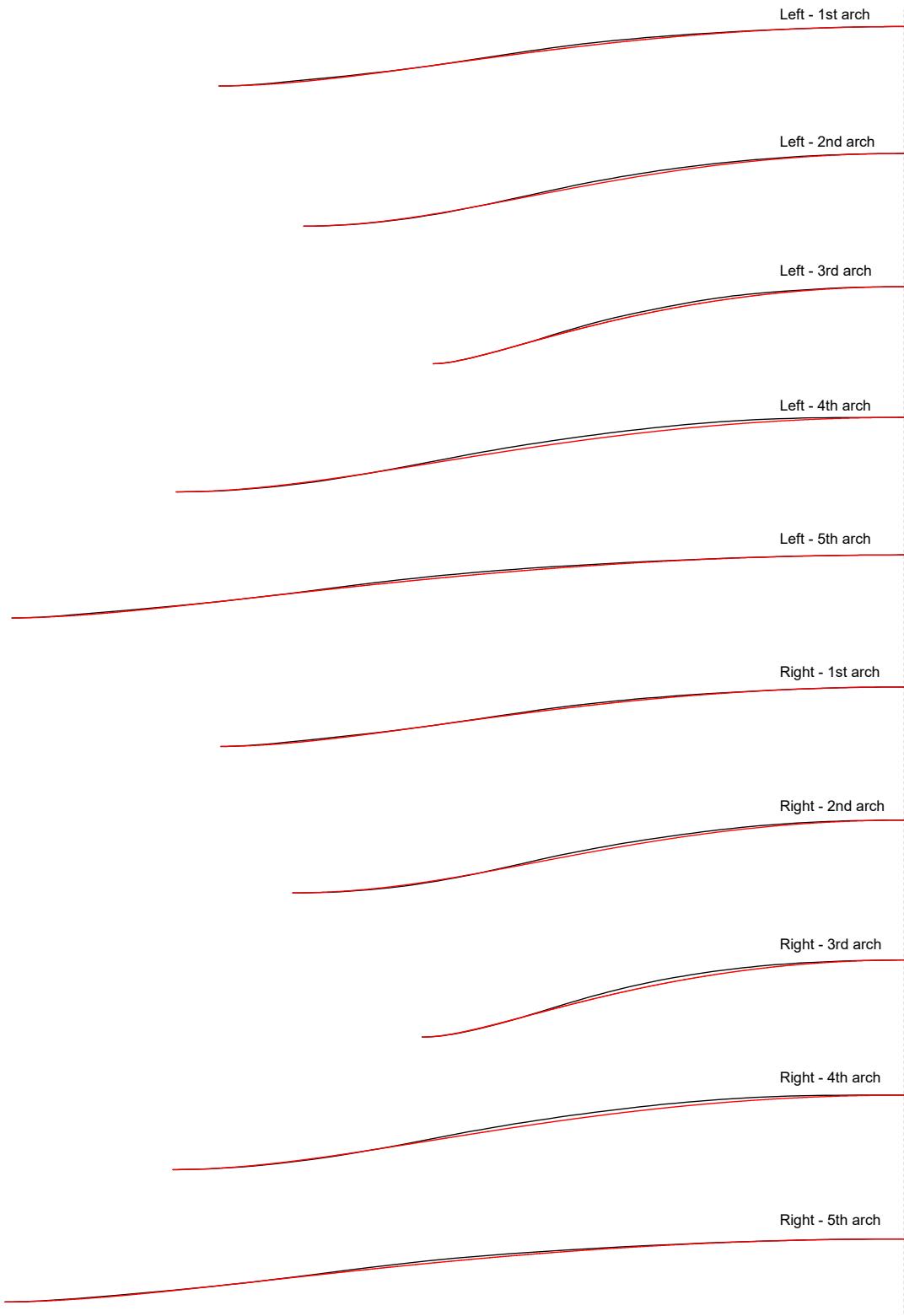
**Figure 57:** Model B, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



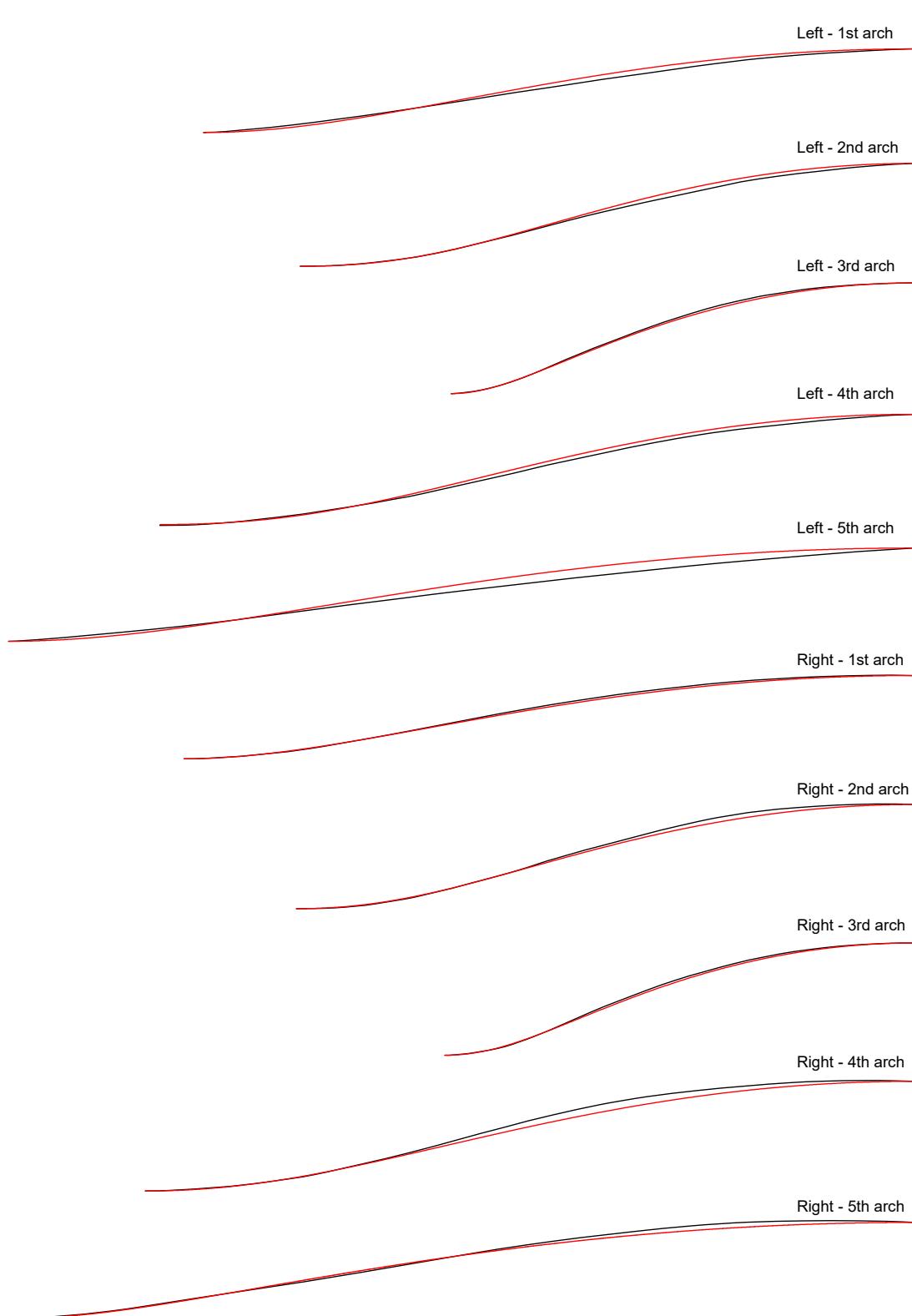
**Figure 58:** Model B, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



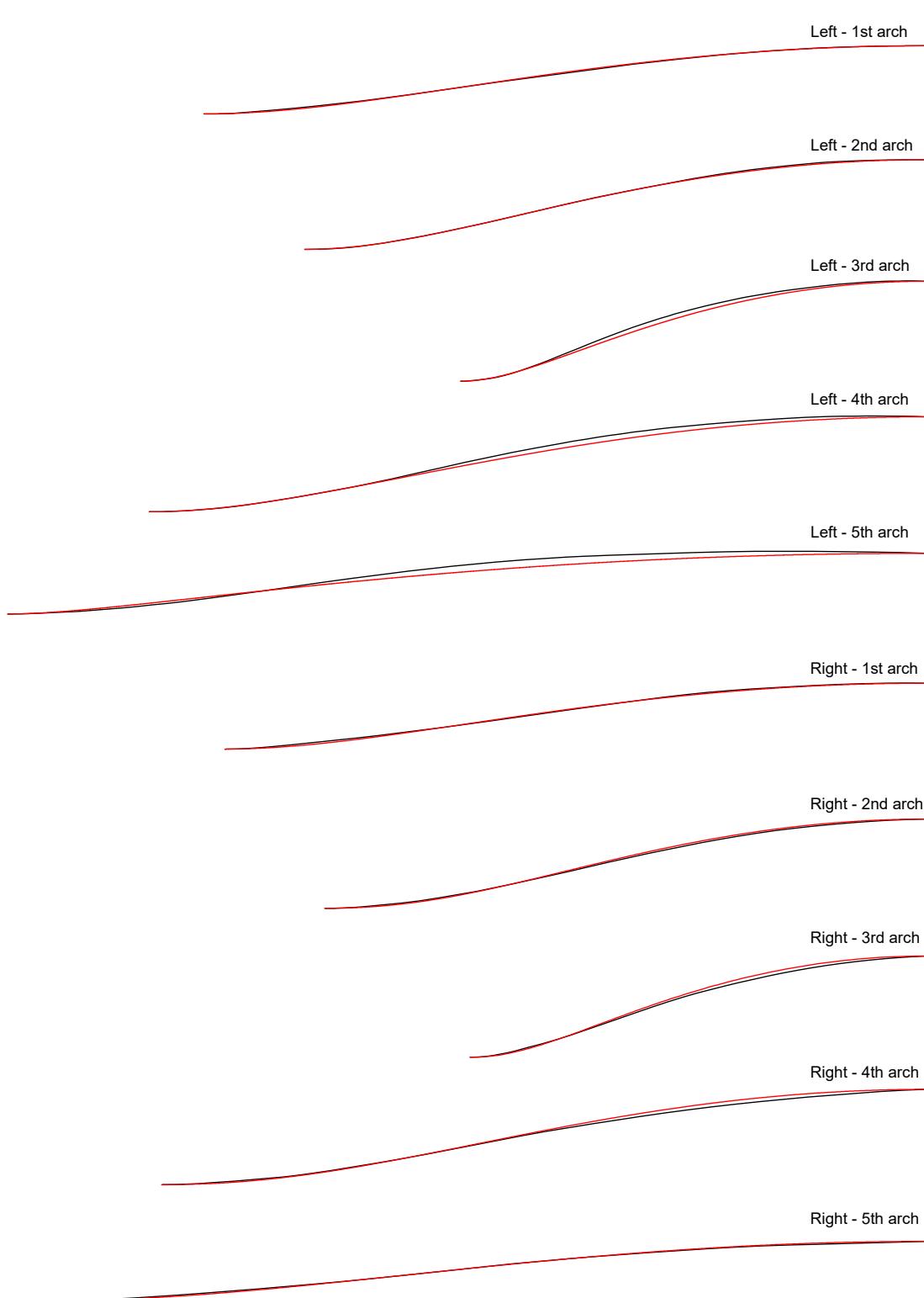
**Figure 59:** Model C, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



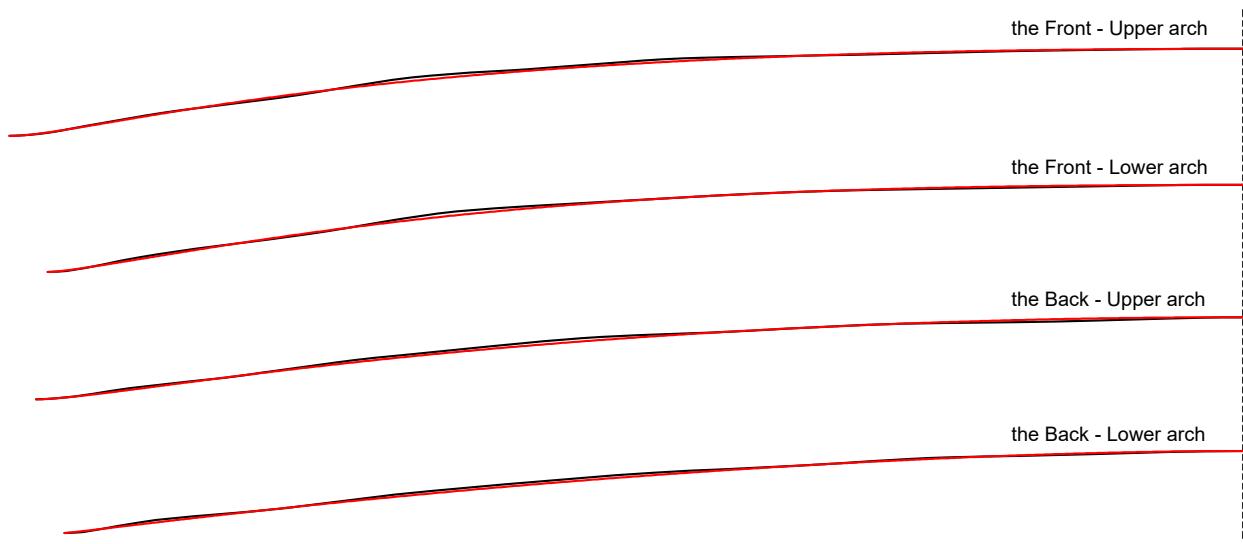
**Figure 60:** Model C, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



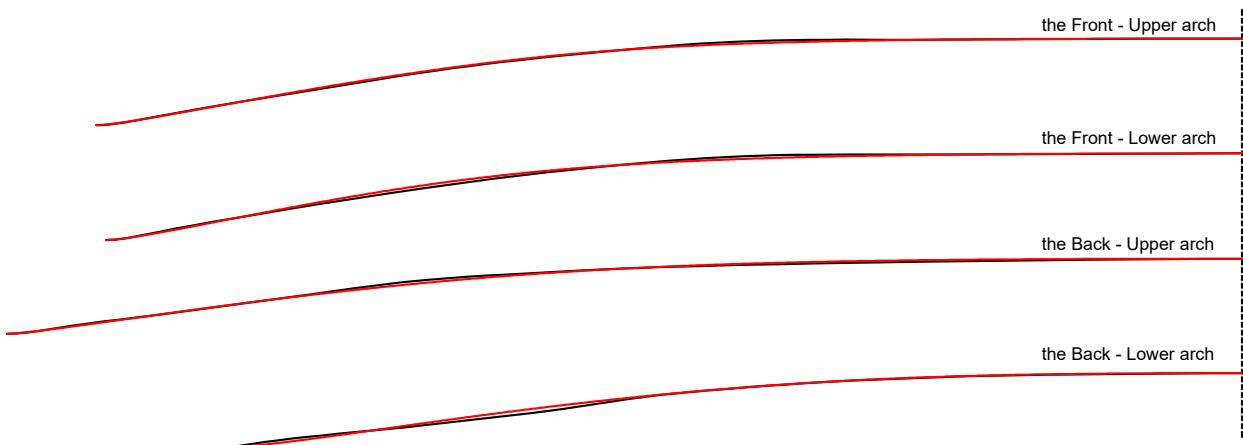
**Figure 61:** Model D, Front arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



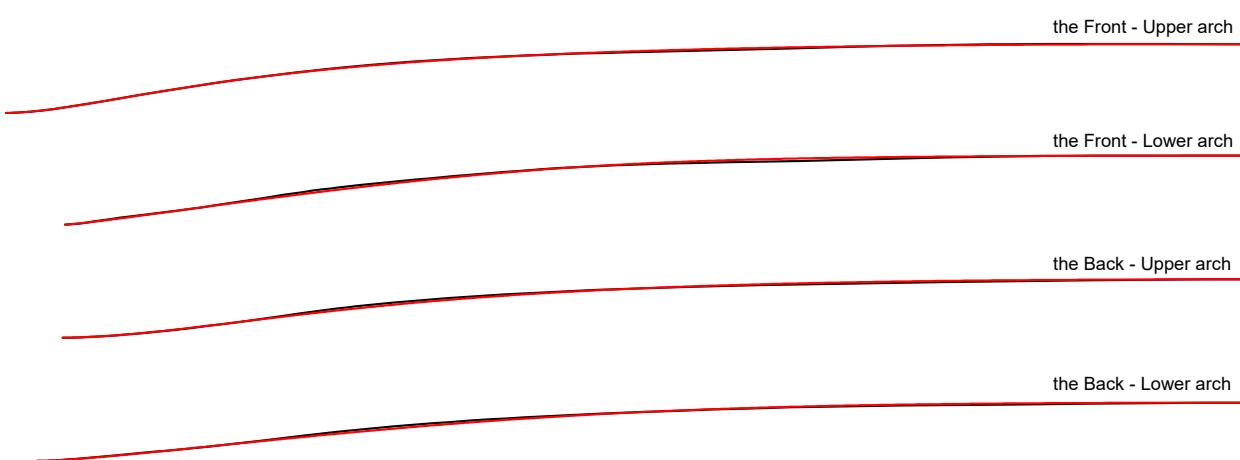
**Figure 62:** Model D, Back arches no. 1-5: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Left/Right)



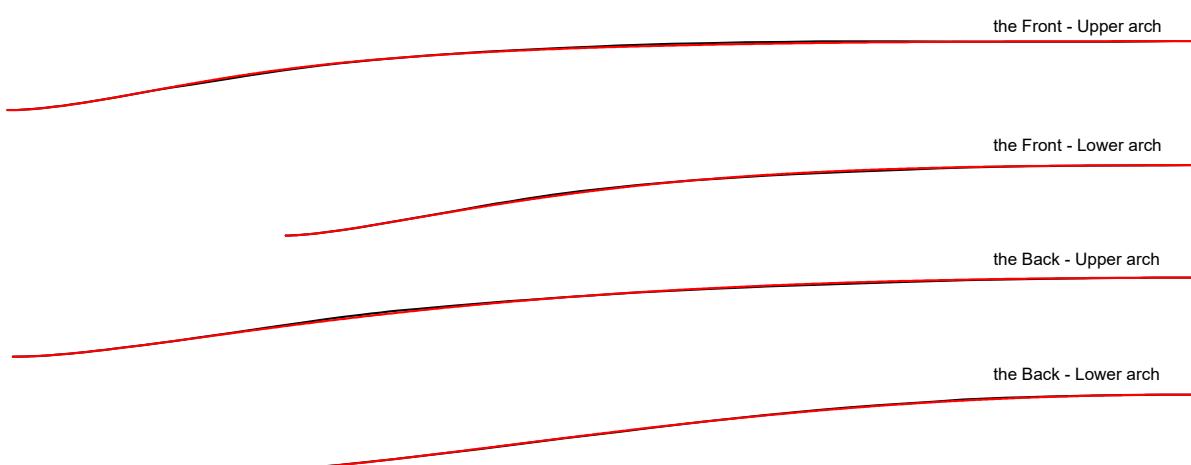
**Figure 63:** Model A, 6th arch: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 64:** Model B, 6th arch: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 65:** Model C, 6th arch: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Front/Back, Upper/Lower parts)



**Figure 66:** Model D, 6th arch: Comparison of reconstruction curve (red) and model curve (black) (Front/Back, Upper/Lower parts)

### 8.2.2 Analisi dei Parametri

I parametri della curva(arch) ricostruita sono indicatori della sua forma e del suo carattere. Analizzando questi parametri, possiamo identificare le caratteristiche della bombatura di Stradivari e persino classificare e sistematizzare le curve(arch) per forma.

La Tabella 5 mostra i valori dei parametri per la 6<sup>a</sup> curva(arch). Poiché tutte le 6<sup>a</sup> curve(arch) sono del tipo CTDAcec, la colonna Tipo è stata omessa. Il significato di ogni parametro è il seguente.

«expo» è il valore dell'esponente che concentra la curva polinomiale cubica a sinistra o a destra. Un valore positivo «+» la concentra a sinistra (verso l'estremo della curva(arch)), mentre un valore negativo «-» la concentra a destra (verso l'apice della curva(arch)). La tabella mostra che la maggior parte dei valori è positiva «+», indicando che la curva polinomiale cubica è principalmente concentrata a sinistra. Ciò significa che la pendenza diventa più ripida verso l'estremo della curva(arch), e un valore assoluto maggiore indica un effetto più pronunciato. Tuttavia, l'effetto di «expo» è proporzionale all'ampiezza della curva polinomiale cubica («bamp»), quindi se l'ampiezza è vicina a «0», anche l'influenza del valore di «expo» è trascurabile.

«bamp» indica l'ampiezza e la direzione del manico della curva polinomiale cubica. Il simbolo «-» significa che il manico è a sinistra (verso l'estremo della curva(arch)), mentre l'assenza di simbolo significa che è a destra. Il numero stesso rappresenta sempre la grandezza dell'ampiezza (negativa). Ad esempio, bamp = -7.313 significa che il manico è a sinistra con un'ampiezza di -7.313, e bamp = 25.272 significa che il manico è a destra con un'ampiezza di -25.272. La tabella mostra che la maggior parte ha un segno «-», indicando che il manico si trova principalmente a sinistra.

«camp» e «pamp» rappresentano rispettivamente l'ampiezza della curva catenaria e della Curva di Trasformazione finale (somma delle due curve). A differenza di «bamp», il segno qui indica il segno effettivo del valore. Ad esempio, camp = -31.683 significa che l'ampiezza è negativa (convessa verso il basso), mentre camp = 2.123 significa che l'ampiezza è positiva (convessa verso l'alto). Poiché «camp» e «pamp» non hanno il concetto di «manico», il segno meno (-) indica l'ampiezza effettiva, e i valori per entrambi sono quasi sempre negativi (convessi verso il basso). Generalmente, i valori assoluti di queste ampiezze tendono ad essere proporzionali alle dimensioni dello strumento.

«d-diff» e «u-diff» rappresentano rispettivamente l'errore con i punti di controllo della forma inferiore e superiore. Hanno un valore massimo di « $\pm 0.001$ », e «0.000» nella tabella significa che l'errore è inferiore a «0.0005».

La tolleranza è stata impostata per ridurre il tempo di calcolo e aumentare il tasso di successo. Si riferisce all'errore nella larghezza della curva(arch) (da un estremo all'apice), nell'altezza e nella distanza dal punto di controllo della pienezza  $Z$ . Poiché le curve di approssimazione CTDAce e CTDAice consentono calcoli molto precisi, la tolleranza è stata impostata a 1e-9, che può essere considerata quasi nessun errore.

Tra i punti di controllo della forma, il punto di controllo inferiore era basato su CP1 (primo punto di contorno), ma la sua coordinata y è stata parzialmente modificata se la generazione della curva era impossibile. Il punto di controllo superiore è stato selezionato tra i punti più adatti tra CP4 e CP7. La tabella mostra che le coordinate del punto di controllo della forma inferiore sono state modificate per un numero significativo di curve(arch), il che suggerisce che i dati per la prima linea di contorno dei modelli originali potrebbero essere imprecisi.

Model	Plate	Side	expo	bamp	camp	pamp	d-diff	u-diff	tolerance	Shape control point
A	Front	Upper	-0.613	-7.313	-31.683	-38.720	0.001	0.000	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.400	-5.450	-34.108	-37.083	0.000	0.000	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
	Back	Upper	0.613	14.781	-14.435	-28.922	0.001	0.001	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
		Lower	0.114	25.272	-0.095	-25.358	0.001	0.001	0.001	CP1 (y:-0.2), CP6
B	Front	Upper	2.259	-28.288	-40.044	-55.495	-0.001	-0.001	0.001	CP1, CP6
		Lower	1.725	-26.375	-39.475	-56.240	0.000	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP6
	Back	Upper	2.113	-20.238	-44.137	-53.806	-0.001	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP7
		Lower	2.881	-8.822	-28.292	-30.537	-0.001	0.000	0.001	CP1 (y:-0.4), CP7
C	Front	Upper	0.472	-53.484	-68.319	-114.736	0.000	-0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	2.395	-47.717	-75.858	-99.146	-0.001	-0.001	0.001	CP1 (y:-0.1), CP5
	Back	Upper	0.556	-39.756	-55.440	-89.199	-0.001	0.001	0.001	CP1, CP5
		Lower	1.875	-27.800	-67.709	-82.027	-0.001	0.000	0.001	CP1 (y:-0.1), CP5
D	Front	Upper	0.750	-33.550	-33.083	-61.701	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	1.300	-9.850	-25.149	-31.493	0.000	0.000	0.001	CP1, CP4
	Back	Upper	0.038	-5.913	-29.014	-34.157	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4
		Lower	-0.888	6.745	-9.072	-14.478	0.001	0.000	0.001	CP1, CP4

**Table 5:** Detailed parameters by model for the 6th arch. Type:CTDAcec, expo:Exponent of distorted cubic polynomial curve («+»:left, «-»:right), bamp:Cubic polynomial curve amplitude and handle direction, camp:Catenary curve amplitude, pamp:Final pattern curve amplitude, d-diff/u-diff:Error with bottom/top shape control point, tolerance:Calculation tolerance for distance to shape and fullness control points, Shape control point:Information on top/bottom shape control points.

Per le curve(arch) n. 1-5, la maggior parte è di tipo CHTA, che ha una pienezza maggiore di una CTDA. Solo poche curve(arch) sono state ricostruite come tipi CETA o CTDAice, che hanno una pienezza minore di una CTDA. Le curve di approssimazione che non hanno un valore  $R$ , come nCHTAce o nCEToice, hanno parametri della Curva di Trasformazione come ampiezza («camp») e valore dell'esponente («expo»).

Le Tabelle 6 e 7 riassumono i parametri per le curve(arch) n. 1-5. Un punto degno di nota qui è che i tipi CETA e CTDAice (contrassegnati con \*), che hanno una pienezza minore di una CTDA, sono per lo più concentrati nella 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> curva(arch). Anche per la 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> curva(arch) che sono di tipo CHTA, i loro valori di  $R$  sono eccezionalmente grandi rispetto ad altre curve(arch). Un grande valore di  $R$  significa che la curva è vicina a una CTDA, cioè la sua pienezza è solo leggermente maggiore di quella di una CTDA. In conclusione, i parametri

mostrano chiaramente una tendenza per cui «la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> curva(arch) hanno una pienezza minore rispetto ad altre curve(arch)».

D'altra parte, le curve di approssimazione che superano i limiti delle trocoidi (nCHTAce) sono concentrate nella 5<sup>a</sup> curva(arch). Anche le 5<sup>a</sup> curve(arch) che sono di tipo CHTA, non nCHTAce, tendono ad avere valori di  $R$  più piccoli rispetto ad altre curve(arch). Ciò significa che «la 5<sup>a</sup> curva(arch) ha una pienezza maggiore rispetto ad altre curve(arch)».

L'analisi finora può essere riassunta come «la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> curva(arch) hanno meno pienezza, e la 5<sup>a</sup> curva(arch) ha più pienezza». Tuttavia, c'è un problema: non è logico confrontare direttamente la pienezza di curve(arch) con larghezze e altezze diverse. La prossima sezione affronterà questo problema e spiegherà un metodo per confrontare oggettivamente la pienezza di curve(arch) con larghezze e altezze diverse.

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
A	Front	BB(L)	1	CTA	176.447	30.845	15.192	-	-	0.010
			2	CTA	10688.846	21.496	5.560	-	-	0.010
			3	CTA	159.219	18.082	10.368	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	25.086	5.850	0.155	-2.034	1E-09
			5	CTA	184.145	39.783	21.924	-	-	0.010
	Back	SP(R)	1	CTA	138.488	30.733	18.188	-	-	0.010
			2	CTA	886.691	22.525	6.785	-	-	0.010
			3	CTA	129.913	18.195	11.458	-	-	0.010
			4	*CETA	1939.080	24.277	5.065	-	-	0.010
			5	CTA	217.751	40.452	19.656	-	-	0.010
B	Front	SP(L)	1	CTA	215.423	32.714	12.978	-	-	0.010
			2	*CETA	3644.551	21.072	4.548	-	-	0.010
			3	CTA	178.081	16.934	8.878	-	-	0.010
			4	*CTDAice	-	24.513	5.350	1.326	-2.667	1E-09
			5	nCTTAce	167.144	42.118	24.265	-2.663	-0.811	0.010
	Back	BB(R)	1	CTA	202.089	32.382	13.420	-	-	0.010
			2	*CTDAice	-	21.451	4.850	0.015	-2.270	1E-09
			3	CTA	160.507	16.909	9.252	-	-	0.010
			4	*CETA	1511.957	22.912	4.433	-	-	0.010
			5	nCTTAce	166.468	41.972	24.214	-3.600	-0.817	0.010
C	Front	BB(L)	1	CTA	212.206	33.539	16.695	-	-	0.012
			2	*CETA	3239.278	24.081	7.296	-	-	0.012
			3	CTA	136.848	21.652	14.691	-	-	0.012
			4	CTDAce	-	29.835	7.500	-0.198	-1.083	1E-09
			5	CTA	189.793	46.840	29.330	-	-	0.012
	Back	SP(R)	1	CTA	267.250	33.225	14.322	-	-	0.012
			2	CTA	2051.964	24.931	8.476	-	-	0.012
			3	CTA	161.254	21.893	13.667	-	-	0.012
			4	CTA	3322.583	30.652	8.176	-	-	0.012
			5	CTA	185.660	47.028	30.081	-	-	0.012
D	Front	SP(L)	1	CTA	161.819	36.062	20.395	-	-	0.012
			2	CTA	820.860	26.379	7.691	-	-	0.012
			3	CTA	128.945	22.464	14.458	-	-	0.012
			4	CTA	1431.019	31.890	7.995	-	-	0.012
			5	nCTTAce	192.764	49.308	29.156	-0.139	-0.889	0.012
	Back	BB(R)	1	CTA	167.752	36.198	19.911	-	-	0.012
			2	CTA	991.802	26.340	7.360	-	-	0.012
			3	CTA	151.718	22.338	13.093	-	-	0.012
			4	CTA	1060.475	32.554	8.616	-	-	0.012
			5	nCTTAce	196.804	49.781	29.058	-0.849	-0.959	0.012

**Table 6:** Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5 (1/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, \*:Curve with less fullness than a CTDA.

Model	Plate	Side	Arch N.	Type	R	r	d	camp	expo	tolerance
C	Front	SP(L)	1	CHTA	627.959	62.470	20.796	-	-	0.020
			2	CHTA	4318.054	43.962	10.818	-	-	0.020
			3	CHTA	316.263	39.224	21.179	-	-	0.020
			4	CHTA	2945.004	57.413	12.935	-	-	0.020
			5	nCHTAce	353.728	90.060	54.001	-0.796	-1.031	0.020
		BB(R)	1	CHTA	841.556	61.674	17.558	-	-	0.020
			2	CHTA	5781.621	43.373	10.536	-	-	0.020
			3	CHTA	314.605	39.085	21.169	-	-	0.020
			4	CHTA	3217.281	57.201	12.712	-	-	0.020
			5	CHTA	383.803	91.717	51.661	-	-	0.020
	Back	BB(L)	1	CHTA	643.186	64.150	19.267	-	-	0.020
			2	CHTA	4887.919	44.934	9.231	-	-	0.020
			3	CHTA	204.809	41.106	26.342	-	-	0.020
			4	CHTA	1442.634	60.568	13.923	-	-	0.020
			5	nCHTAce	380.492	93.017	50.206	-0.186	-0.877	0.020
		SP(R)	1	CHTA	516.159	65.516	22.815	-	-	0.020
			2	*CETA	5764.898	42.643	7.444	-	-	0.020
			3	CHTA	265.716	41.726	22.650	-	-	0.020
			4	CHTA	1375.980	61.202	14.278	-	-	0.020
			5	CHTA	428.348	93.818	45.638	-	-	0.020
D	Front	BB(L)	1	CHTA	1661.465	25.504	5.362	-	-	0.010
			2	*CETA	487.376	17.645	3.628	-	-	0.010
			3	CHTA	813.161	16.167	6.660	-	-	0.010
			4	*nCETAice	687.004	21.594	3.899	0.037	-1.901	0.010
			5	CHTA	886.179	35.128	7.975	-	-	0.010
		SP(R)	1	CHTA	601.170	28.397	7.329	-	-	0.010
			2	*CETA	738.275	19.014	4.213	-	-	0.010
			3	*CETA	1018.819	15.473	5.377	-	-	0.010
			4	*CETA	1527.610	24.364	4.809	-	-	0.010
			5	CHTA	216.966	39.200	19.164	-	-	0.010
	Back	SP(L)	1	CHTA	598.251	28.653	6.487	-	-	0.010
			2	CHTA	1499.270	21.831	5.474	-	-	0.010
			3	CHTA	414.510	16.643	6.825	-	-	0.010
			4	CHTA	635.787	29.673	8.026	-	-	0.010
			5	nCHTAce	186.319	45.242	23.778	-3.622	-0.963	0.010
		BB(R)	1	CHTA	456.513	28.642	7.165	-	-	0.010
			2	*CETA	767.208	18.183	3.521	-	-	0.010
			3	CHTA	7156.057	15.358	5.418	-	-	0.010
			4	*CETA	1446.391	23.617	3.987	-	-	0.010
			5	CHTA	2840.146	32.331	3.988	-	-	0.010

**Table 7:** Detailed Parameters by Model for Arches No. 1-5 (2/2). Type:Type of reconstruction curve, R/r/d:Trochoid parameters, camp:Catenary curve amplitude, expo:Exponent of exponentially distorted catenary, tolerance:Calculation tolerance for arch width, height, and distance to fullness control point, \*:Curve with less fullness than a CTDA.

### 8.2.3 Analisi della Pienezza

Il termine «volume» è spesso usato in relazione alle bombature, ma a rigore non è un'espressione adatta per una singola curva(arch), che è una sezione trasversale 2D. Volume si riferisce a una quantità tridimensionale, mentre una sezione trasversale di una curva(arch) 2D non ha volume. Naturalmente, un'espressione come “il volume della tavola di un violino è maggiore del suo fondo.” è possibile, poiché si riferisce al volume dell'intera tavola tridimensionale. Tuttavia, poiché questo rapporto tratta il grado di rigonfiamento di una curva(arch) su un piano 2D, il termine volume non è appropriato.

Pertanto, sono necessari un termine adatto e un indice oggettivo per rappresentare il grado di rigonfiamento di una curva(arch) in un piano 2D. In particolare, è richiesto uno standard comune per confrontare curve(arch) con larghezze e altezze diverse. Poiché attualmente non esiste un termine o un indice ufficiale per descrivere la forma 2D della curva(arch) di uno strumento a corda, questo rapporto ne definirà e utilizzerà di nuovi.

Questo rapporto usa il termine «Pienezza (Fullness)» per rappresentare «il grado di rigonfiamento di una curva(arch) 2D»<sup>7</sup>. Questo termine è già un concetto usato in altri campi, come l'architettura navale, per descrivere la rotondità di uno scafo o quanto una specifica sezione trasversale riempia una forma di riferimento. Pertanto, è stato giudicato il più adatto per esprimere la forma di una curva(arch) 2D.

Per quantificare questa pienezza, questo rapporto ha introdotto «l'Indice di Pienezza Assoluta (Absolute Fullness Index, AFI)» e «l'Indice di Pienezza Relativa (Relative Fullness Index, RFI)». Definiremo prima questi due indici e poi li useremo per analizzare le curve(arch).

Poiché la pienezza è un concetto proporzionale all'area, definiremo prima l'«area di una curva(arch)». (※ D'ora in poi, tutti i riferimenti ad «area e larghezza della curva(arch)» si riferiscono all'«area e larghezza di metà curva(arch)» per tenere conto della simmetria.)

#### **Definition 8.1. Area della curva(arch)**

*L'area della forma chiusa delimitata dalla curva della curva(arch), dalla linea orizzontale che passa per l'estremo della curva(arch) e dalla linea verticale che passa per il suo apice.*

Ciò corrisponde all'area grigia nella Figura 67(a).

Sulla base di ciò, l'indice di Pienezza Assoluta è definito come segue.

#### **Definition 8.2. Indice di Pienezza Assoluta (AFI, unità:[%])**

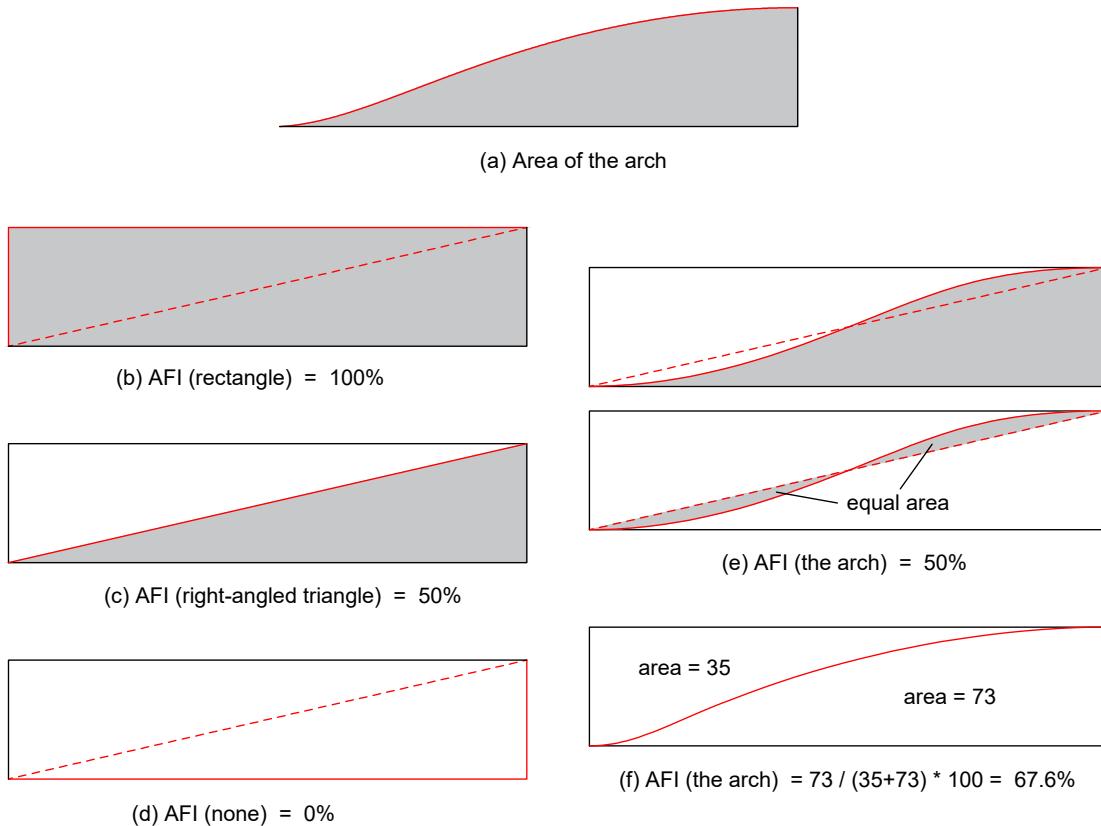
*Il rapporto tra l'area della curva(arch) e l'area del rettangolo circoscritto minimo (larghezza: larghezza della*

<sup>7</sup>Come termine per denotare il grado di rigonfiamento, sono stati considerati diversi candidati come Curvatura, Convessità e Rigonfiamento. Tuttavia, dopo aver considerato complessivamente l'uso, la sfumatura e l'adeguatezza come termine fisico, è stato scelto infine «Pienezza» (Fullness).

*curva(arch), altezza: altezza della curva(arch)). Espresso in percentuale (%). Abbreviato anche come «Pienezza Assoluta».*

Secondo la definizione sopra, l'AFI è calcolato con la seguente formula:

$$\text{AFI}[\%] = \frac{\text{Area Curva(arch)}}{\text{Larghezza Curva(arch)} \times \text{Altezza Curva(arch)}} \times 100$$



**Figure 67:** Arch area and Absolute Fullness Index (AFI)

Questo metodo di dividere l'area di una forma specifica per il suo rettangolo circoscritto minimo è comunemente usato per analizzare e normalizzare la forma.

Secondo questa definizione, per due curve(arch) A (AFI= 85%) e B (AFI= 77%) con la stessa larghezza e altezza, si può affermare che “la curva(arch) A è circa il 8% più piena della curva(arch) B in termini di AFI.”

(Nota: Se una curva(arch) è simmetrica, l'AFI calcolato sulla base dell'intera curva(arch) è sempre uguale al valore calcolato sulla base di metà curva(arch).)

La Figura 67 (b) mostra un AFI del 100%, che può essere pensato come lo stato in cui la curva della curva(arch) (linea rossa continua) si è gonfiata fino a diventare infinitamente vicina a un rettangolo. (c) mostra un AFI del

50%, che è come lo stato in cui la curva della curva(arch) è stata appiattita in una linea retta. Tuttavia, poiché una curva(arch) reale non è una linea retta, quando l'area tra la linea retta che collega l'estremo e l'apice e la curva della curva(arch) è uguale sopra e sotto la linea (e), l'area di quella curva(arch) è la stessa dell'area di un triangolo rettangolo, risultando in un AFI del 50%. Un AFI dello 0% è un caso in cui l'area della curva(arch) non esiste affatto, come in (d).

Secondo la definizione di cui sopra, per una curva(arch) con un'area di 73 e un'area rettangolare di 108 (=35+73) come nella Figura 67(f), l'AFI può essere calcolato con la seguente formula:

$$\begin{aligned} \text{AFI} &= \frac{\text{Area Curva(arch)}}{\text{Area Rettangolare}} \times 100 \\ &= \frac{73}{35 + 73} \times 100 \\ &\approx 67.6\% \end{aligned}$$

Successivamente, l'indice di Pienezza Relativa è definito come segue.

**Definition 8.3. Indice di Pienezza Relativa (RFI, unità:[%])**

*Per una data larghezza e altezza, considerando una maxCHTA, una CTDA e una minCETA, la scala è definita in modo che l'area della curva(arch) corrisponda a +100% quando è uguale all'area della maxCHTA, 0% quando è uguale all'area della CTDA, e -100% quando è uguale all'area della minCETA. È il valore percentuale dell'area della curva(arch) convertito secondo questa scala. Abbreviato anche come «Pienezza Relativa».*

In altre parole, mentre l'AFI usa il rettangolo circoscritto come riferimento, l'RFI usa come scala le curve(arch) con la pienezza massima (maxCHTA), standard (CTDA) e minima (minCETA) ottenibili con una trocoide.

L'RFI è stato introdotto per cogliere facilmente le seguenti informazioni:

- Il livello di pienezza della curva(arch) all'interno dell'intervallo trocoidale.
- Quanto ancora la pienezza può essere aumentata o diminuita.
- Se la curva(arch) è una curva trocoide standard o una curva di approssimazione che supera i suoi limiti.

Ad esempio, se una curva(arch) ha un RFI dell'83%, significa che questa curva(arch) ha una pienezza maggiore dello standard (tipo CTDA) e ha ancora margine prima di raggiungere la pienezza massima (100%). Un RFI del 112% significa che ha superato la pienezza massima (100%), indicando che si tratta di una curva di approssimazione oltre i limiti di una CHTA (nCHTAce). Allo stesso modo, un RFI di -35% indica un tipo CETA con meno pienezza, e un RFI di -101% indica una curva di approssimazione oltre i limiti di una CETA (nCETAice).

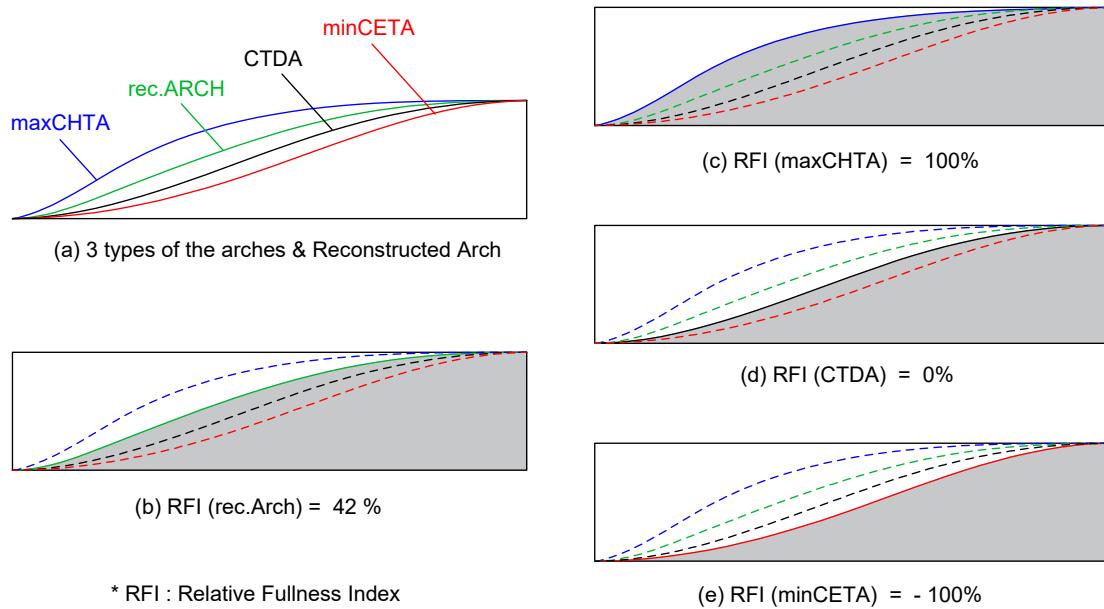
Secondo la definizione di cui sopra, l'RFI può essere calcolato con le seguenti formule:

a. Se l'area della curva(arch) è maggiore o uguale all'area della CTDA (  $RFI \geq 0\%$  ) :

$$RFI[\%] = \frac{\text{Area Curva(arch)} - \text{Area CTDA}}{\text{Area CHTA} - \text{Area CTDA}} \times 100$$

b. Se l'area della curva(arch) è minore dell'area della CTDA (  $RFI < 0\%$  ) :

$$RFI[\%] = \frac{\text{Area Curva(arch)} - \text{Area CTDA}}{\text{Area CTDA} - \text{Area CETA}} \times 100$$



**Figure 68:** Arch area and Relative Fullness Index (RFI)

La Figura 68 illustra il concetto di RFI. L'RFI utilizza le aree della maxCHTA, CTDA e minCETA come scala, non il rettangolo circoscritto.

Un punto da notare sull'RFI è che la quantità di variazione dell'area nell'intervallo  $+100 \sim 0\%$  è diversa da quella nell'intervallo  $0 \sim -100\%$ . Ciò deriva dalle caratteristiche delle curve trocoidi, poiché l'intervallo di variazione di una CHTA è generalmente più ampio di quello di una CETA.

Sulla base dei due nuovi indici definiti, questo rapporto analizzerà ora la pienezza delle curve(arch) ricostruite ed esaminerà le loro caratteristiche.

Le Tabelle dalla 8 alla 10 mostrano la pienezza di tutte le curve(arch) ricostruite. Presentano le aree della max-CHTA, CTDA e minCETA con la stessa larghezza e altezza di ogni curva(arch) ricostruita (rec.Arch), insieme ai

valori AFI e RFI calcolati da essi.

Per prima cosa, osserviamo la 6<sup>a</sup> curva(arch). Nella Tabella 8, l'intervallo di pienezza esprimibile da una trocoide (AFI da circa 47% per minCETA a circa 58% per maxCHTA) è relativamente stretto e ha una distribuzione relativamente uniforme. L'RFI delle curve(arch) della 6<sup>a</sup> curva(arch) ricostruite è distribuito su un intervallo molto ampio, dal 117% al 405%, tutti valori che superano di gran lunga la pienezza massima di una trocoide (RFI 100%). Ciò significa che la pienezza della 6<sup>a</sup> curva(arch) è molto grande. C'è anche una tendenza per cui la pienezza della tavola è maggiore di quella del fondo. In particolare, il Modello D mostra una differenza di pienezza molto grande tra la parte superiore della tavola (RFI oltre 400%) e la parte inferiore del fondo (RFI sotto 120%).

La 6<sup>a</sup> curva(arch) ha una forma in cui l'area vicino all'apice di una curva CTDA è allungata, il che causa un aumento esplosivo dell'RFI. Si presume che il valore estremo dell'RFI per il Modello D sia dovuto alla posizione imprecisa dell'apice, come sottolineato durante il processo di modellazione. In effetti, la lunghezza della parte superiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) del Modello D è molto più lunga di quella di altri modelli, il che sembra essere la causa della massima differenza di pienezza tra le parti superiore e inferiore.

(Nota: Per l'analisi della pienezza della 6<sup>a</sup> curva(arch), la tolleranza è stata impostata al doppio di quella delle altre curve(arch).)

M.	P.	S.	Area [mm <sup>2</sup> ]				AFI [%]				RFI [%]	T.
			maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCHTA	CTDA	minCETA	rec.Arch		
A	F	U	1244.01	1112.16	977.04	1491.15	59.03	52.77	46.36	70.75	287.46	0.020
		L	1207.87	1079.41	996.54	1449.82	59.15	52.86	48.80	71.00	288.34	0.020
	B	U	1142.91	1023.63	909.64	1286.29	58.81	52.67	46.81	66.19	220.21	0.020
		L	1118.26	1000.86	948.03	1210.53	58.92	52.73	49.95	63.78	178.60	0.020
B	F	U	1768.14	1575.83	1407.11	2213.83	59.43	52.97	47.30	74.41	331.76	0.024
		L	1756.12	1563.08	1382.83	2211.13	59.54	52.99	46.88	74.97	335.71	0.024
	B	U	1625.04	1456.00	1294.11	2023.47	58.47	52.39	46.56	72.80	335.70	0.024
		L	1378.13	1228.24	1085.01	1560.59	59.30	52.85	46.69	67.16	221.74	0.024
C	F	U	4607.17	4136.30	3754.20	5985.72	58.12	52.18	47.36	75.52	392.77	0.040
		L	4399.86	3947.20	3559.57	5591.38	58.29	52.29	47.16	74.07	363.23	0.040
	B	U	3697.77	3330.29	3054.43	4558.16	57.67	51.94	47.64	71.09	334.13	0.040
		L	3774.78	3399.36	3289.01	4589.39	57.63	51.90	50.21	70.07	316.98	0.040
D	F	U	1267.91	1140.08	1007.28	1657.88	58.15	52.29	46.20	76.03	405.08	0.020
		L	1011.50	902.28	796.18	1191.74	59.47	53.05	46.81	70.06	265.02	0.020
	B	U	1460.76	1308.62	1171.55	1664.11	58.75	52.63	47.12	66.93	233.67	0.020
		L	1084.50	965.06	858.30	1105.91	59.80	53.21	47.32	60.98	117.92	0.020

**Table 8:** Arch Area and Fullness by Model for the 6th Arch. M.:Model, P.:Front(F)/Back(B), S.:Upper(U)/Lower(L), Type:CTDAcec, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (calculation tolerance for distance to arch width, height, and fullness control point).

Successivamente, esaminiamo le curve(arch) n. 1-5. Nelle Tabelle 9 e 10, quasi tutte le curve(arch) con un RFI

negativo (CETA, CTDAice, ecc.) sono o la 2<sup>a</sup> o la 4<sup>a</sup> curva(arch). In linea con l'analisi dei parametri, ciò mostra la caratteristica che «la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> curva(arch) hanno una pienezza minore rispetto ad altre curve(arch)». Poiché queste curve(arch) si trovano vicino alle punte della tavola e hanno una forma allungata alle estremità, la loro pienezza sembra diminuire. Anche nei casi in cui il loro RFI è positivo, il valore è significativamente più basso rispetto ad altre curve(arch).

Un'altra caratteristica è che «l'RFI della 5<sup>a</sup> curva(arch) è maggiore rispetto ad altre curve(arch)». Ci sono molti casi in cui l'RFI supera il 100 ed è stata ricostruita come una curva di approssimazione, il che è coerente con i risultati dell'analisi dei parametri.

Osservando i tipi di curva(arch), tutte le curve(arch) ricostruite come nCHTAce hanno un RFI superiore al 100%. Ciò significa che una curva(arch) teoricamente inesistente oltre i limiti di una trocoide è stata implementata come una curva di approssimazione. Al contrario, la curva(arch) nCETAice del Modello D ha un RFI di -56.81%, che non raggiunge il limite di -100%. Ciò corrisponde a un caso in cui esiste teoricamente ma non ha potuto essere ricostruita per problemi computazionali. Sarebbe probabilmente possibile ricostruirla come una CETA standard aumentando la precisione del calcolo.

Inoltre, la curva(arch) Modello A-T-S-4 ha un RFI di -3.16% ma è di tipo CTDAice, non CETA. Ciò significa che, poiché la curva target era estremamente simile a una CTDA, richiedendo un valore di  $R$  molto grande per una CETA, è stata invece creata una curva di approssimazione. Tuttavia, per la curva(arch) Modello A-F-A-4, si può dedurre che il calcolo sia fallito, portando alla creazione di una curva di approssimazione.

(Nota: Sebbene non sia nella tabella, l'AFI della CTDA e della maxCHTA di riferimento sembra essere influenzato dal rapporto larghezza/altezza della curva(arch). Generalmente, un'altezza maggiore rispetto alla larghezza tende a risultare in un AFI maggiore.)

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm <sup>2</sup> ]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCTA	CTDA	minCETA	rec.Arch		
F	B	1	CTA	438.41	358.32	333.05	392.56	66.71	54.52	50.68	59.73	42.76	0.010	
		2	CTA	491.11	412.68	372.66	417.85	67.08	56.37	50.90	57.08	6.59	0.010	
		3	CTA	397.35	345.53	308.31	368.65	67.67	58.84	52.50	62.78	44.61	0.010	
		4	CTDAice	619.02	514.80	472.00	513.44	67.13	55.83	51.19	55.68	-3.16	1E-09	
		5	CTA	562.90	494.16	456.61	549.70	61.56	54.04	49.93	60.11	80.80	0.010	
	S	1	CTA	433.54	354.45	313.96	395.93	66.75	54.58	48.34	60.96	52.45	0.010	
		2	CTA	487.98	410.23	363.44	419.56	67.11	56.41	49.98	57.70	12.01	0.010	
		3	CTA	395.82	344.44	307.84	371.94	67.66	58.88	52.62	63.58	53.53	0.010	
		4	CETA	628.53	522.23	510.58	513.28	67.08	55.74	54.49	54.78	-76.77	0.010	
		5	CTA	572.09	502.94	452.45	553.33	61.38	53.96	48.55	59.37	72.86	0.010	
A	B	1	CTA	314.46	278.60	246.86	302.66	60.37	53.48	47.39	58.10	67.10	0.010	
		2	CETA	440.23	365.05	331.73	362.06	67.08	55.63	50.55	55.17	-8.98	0.010	
		3	CTA	341.93	295.66	266.04	312.88	67.74	58.58	52.71	61.99	37.20	0.010	
		4	CTDAice	553.27	456.96	420.23	447.18	67.14	55.45	51.00	54.27	-26.62	1E-09	
		5	nCTAAce	421.79	375.45	336.56	437.57	59.68	53.12	47.62	61.91	134.05	0.010	
	B	1	CTA	311.22	275.57	246.63	300.40	60.45	53.53	47.90	58.35	69.65	0.010	
		2	CTDAice	438.54	363.79	326.70	363.69	67.08	55.65	49.98	55.63	-0.29	1E-09	
		3	CTA	339.83	294.09	267.57	312.68	67.75	58.63	53.34	62.34	40.65	0.010	
		4	CETA	552.70	456.27	404.97	446.20	67.19	55.46	49.23	54.24	-19.63	0.010	
		5	nCTAAce	420.57	374.44	335.60	441.89	59.68	53.13	47.62	62.70	146.21	0.010	
B	F	1	CTA	657.20	542.12	489.52	590.90	67.03	55.30	49.93	60.27	42.39	0.012	
		2	CETA	806.32	691.02	625.85	685.86	67.57	57.90	52.44	57.47	-7.91	0.012	
		3	CTA	569.58	499.91	443.22	544.19	67.33	59.10	52.40	64.33	63.57	0.012	
		4	CTDAce	946.67	791.33	727.81	793.72	67.33	56.28	51.77	56.45	1.54	1E-09	
		5	CTA	831.36	726.57	704.83	819.39	62.04	54.22	52.60	61.14	88.58	0.012	
	B	1	CTA	660.86	545.17	524.07	586.30	66.99	55.26	53.12	59.43	35.55	0.012	
		2	CTA	801.62	687.14	630.27	693.67	67.61	57.96	53.16	58.51	5.70	0.012	
		3	CTA	578.41	506.63	452.45	545.83	67.31	58.96	52.65	63.52	54.61	0.012	
		4	CTA	948.94	792.76	730.34	800.68	67.36	56.27	51.84	56.83	5.07	0.012	
		5	CTA	833.67	728.67	667.01	823.77	62.02	54.21	49.62	61.28	90.58	0.012	
B	S	1	CTA	462.98	406.17	366.75	452.99	61.60	54.04	48.80	60.27	82.41	0.012	
		2	CTA	593.16	492.56	453.88	506.47	67.31	55.89	51.50	57.47	13.83	0.012	
		3	CTA	482.01	412.57	371.82	452.63	67.34	57.64	51.94	63.23	57.69	0.012	
		4	CTA	801.57	658.84	633.13	673.44	67.30	55.32	53.16	56.54	10.23	0.012	
		5	nCTAAce	613.56	544.99	491.23	614.57	59.94	53.25	47.99	60.04	101.48	0.012	
	B	1	CTA	464.43	407.62	373.33	453.54	61.56	54.03	49.48	60.11	80.82	0.012	
		2	CTA	597.77	496.29	476.69	507.53	67.26	55.84	53.64	57.11	11.07	0.012	
		3	CTA	482.84	413.46	367.74	447.98	67.29	57.62	51.25	62.43	49.76	0.012	
		4	CTA	803.26	659.86	605.37	677.63	67.33	55.31	50.74	56.80	12.39	0.012	
		5	nCTAAce	617.28	548.99	512.77	623.45	59.84	53.22	49.71	60.44	109.03	0.012	

**Table 9: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5 (1/2). M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (for arch width, height, and distance to fullness control point).**

M.	P.	S.	N.	Type	Area [mm <sup>2</sup> ]				AFI [%]				RFI [%]	T.
					maxCTA	CTDA	minCETA	rec.Arch	maxCTA	CTDA	minCETA	rec.Arch		
F	S	1	CTA	1601.13	1403.81	1290.47	1495.07	61.73	54.12	49.75	57.64	46.25	0.020	
		2	CTA	1751.12	1454.56	1306.96	1468.41	67.08	55.72	50.06	56.25	4.67	0.020	
		3	CTA	1529.66	1305.71	1153.25	1398.67	67.53	57.64	50.91	61.75	41.51	0.020	
		4	CTA	2283.76	1915.45	1693.04	1953.72	65.35	54.81	48.45	55.91	10.39	0.020	
		5	nCTAAce	2228.60	1978.54	1791.83	2240.74	60.19	53.43	48.39	60.52	104.85	0.020	
	B	1	CTA	1623.55	1423.53	1282.79	1500.40	61.65	54.06	48.71	56.98	38.43	0.020	
		2	CTA	1742.57	1447.54	1311.77	1461.02	67.11	55.75	50.52	56.27	4.57	0.020	
		3	CTA	1523.98	1302.14	1149.38	1395.19	67.49	57.67	50.90	61.79	41.95	0.020	
		4	CTA	2285.07	1917.31	1710.34	1953.84	65.32	54.81	48.89	55.85	9.93	0.020	
		5	CTA	2259.07	2006.80	1857.80	2247.26	60.09	53.38	49.42	59.78	95.32	0.020	
C	B	1	CTA	1264.33	1121.80	1065.03	1197.11	60.19	53.41	50.70	56.99	52.83	0.020	
		2	CTA	1511.29	1231.80	1195.99	1243.91	67.17	54.75	53.16	55.29	4.33	0.020	
		3	CTA	1261.20	1056.34	982.03	1172.06	67.36	56.42	52.45	62.60	56.49	0.020	
		4	CTA	1717.17	1508.94	1447.62	1566.08	61.47	54.01	51.82	56.06	27.44	0.020	
		5	nCTAAce	1709.82	1528.82	1494.61	1711.93	59.02	52.77	51.59	59.09	101.17	0.020	
	S	1	CTA	1261.65	1118.90	1026.17	1205.85	60.23	53.42	48.99	57.57	60.91	0.020	
		2	CETA	1538.47	1252.59	1142.26	1237.70	67.14	54.66	49.85	54.01	-13.50	0.020	
		3	CTA	1290.88	1078.21	978.35	1174.37	67.38	56.28	51.06	61.29	45.22	0.020	
		4	CTA	1723.51	1515.20	1390.93	1574.91	61.42	54.00	49.57	56.12	28.67	0.020	
		5	CTA	1722.60	1540.19	1468.92	1708.31	59.00	52.75	50.31	58.51	92.17	0.020	
D	F	1	CTA	451.65	367.52	328.91	374.40	67.11	54.61	48.87	55.63	8.17	0.010	
		2	CETA	483.63	405.21	360.98	378.82	67.52	56.57	50.40	52.89	-59.67	0.010	
		3	CTA	395.24	344.83	303.73	350.43	68.04	59.36	52.29	60.33	11.10	0.010	
		4	nCETAAice	635.58	525.72	466.51	492.08	67.38	55.74	49.46	52.17	-56.81	0.010	
		5	CTA	588.83	516.99	466.95	535.93	61.55	54.04	48.81	56.02	26.37	0.010	
	B	1	CTA	462.01	375.35	337.06	390.37	67.05	54.47	48.92	56.65	17.33	0.010	
		2	CETA	492.63	412.91	373.60	398.44	67.54	56.61	51.22	54.62	-36.81	0.010	
		3	CETA	406.70	355.01	321.32	350.25	68.02	59.38	53.74	58.58	-14.11	0.010	
		4	CETA	643.71	530.87	483.33	519.53	67.40	55.59	50.61	54.40	-23.84	0.010	
		5	CTA	594.97	519.89	459.73	571.06	62.05	54.22	47.94	59.55	68.15	0.010	
B	S	1	CTA	333.72	294.67	261.36	307.40	60.81	53.70	47.63	56.02	32.61	0.010	
		2	CTA	417.73	345.45	312.43	350.65	67.29	55.65	50.33	56.48	7.18	0.010	
		3	CTA	352.07	302.90	275.33	311.84	67.87	58.39	53.08	60.12	18.20	0.010	
		4	CTA	552.46	450.16	411.22	467.57	67.24	54.79	50.05	56.91	17.02	0.010	
		5	nCTAAce	364.28	326.52	307.78	382.66	58.67	52.59	49.57	61.63	148.69	0.010	
	B	1	CTA	313.10	276.50	250.79	290.28	60.79	53.68	48.69	56.36	37.66	0.010	
		2	CETA	402.63	333.53	307.95	321.49	67.37	55.80	51.52	53.79	-47.07	0.010	
		3	CTA	349.46	302.07	278.52	302.97	67.89	58.68	54.11	58.86	1.90	0.010	
		4	CETA	545.03	445.20	403.43	432.90	67.18	54.88	49.73	53.36	-29.46	0.010	
		5	CTA	346.93	310.82	286.68	317.10	58.74	52.63	48.54	53.69	17.39	0.010	

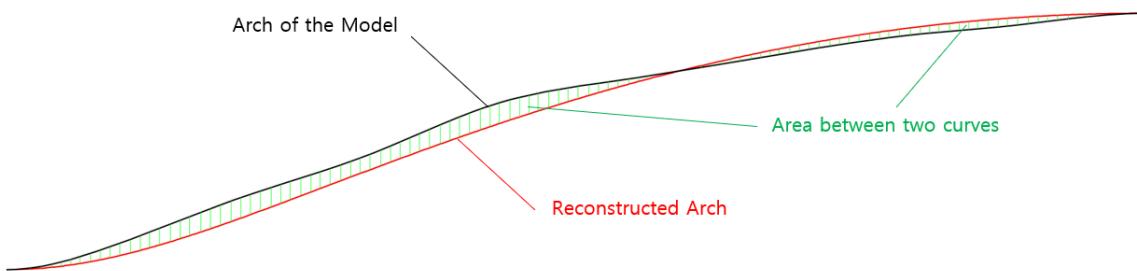
**Table 10: Arch Area and Fullness by Model for Arches No. 1-5 (2/2).** M.:Model, P.:Front/Back, S.:Left/Right, N.:Arch Number, Type:Type of reconstruction curve, rec.Arch:Recreated Arch, T.:Tolerance (for arch width, height, and distance to fullness control point).

### 8.2.4 Analisi dell'Errore

L'errore tra la curva(arch) ricostruita e la curva(arch) del modello è definito come segue. In primo luogo, le due curve(arch) vengono sovrapposte allineando i loro apici, e viene calcolata l'area tra le due curve, «l'area di errore ( $mm^2$ )». Successivamente, quest'area di errore viene divisa per la lunghezza della curva(arch) del modello ( $mm$ ) per calcolare «l'errore per unità di lunghezza ( $mm^2/mm$ )». Più piccolo è questo valore, più simili sono considerate le due curve, con «0» che indica curve identiche. L'errore per unità di lunghezza viene calcolato per tutte le curve(arch), e sulla base di ciò, vengono determinate le medie degli errori di gruppo e complessivi ( $mm$ ) e le deviazioni standard ( $mm$ ).

L'area di errore si trova integrando la curva chiusa formata dalle due curve(arch). Durante questo processo, a causa della tolleranza impostata nel processo di ricostruzione, si verificano lievi differenze nella larghezza e nell'altezza delle due curve(arch), causando un piccolo disallineamento alle estremità della curva(arch). Poiché in questa parte disallineata non si forma una curva chiusa, l'integrazione è stata eseguita dopo aver creato una forma chiusa disegnando una linea perpendicolare dall'estremità della larghezza minore. Per il calcolo è stato utilizzato un programma personalizzato.

La Figura 69 mostra la curva chiusa formata dalle due curve(arch), cioè l'area di errore. Quando la curva nera è la curva(arch) del modello e quella rossa è la curva(arch) ricostruita, l'area tratteggiata in verde è «l'area di errore».



**Figure 69:** Area between the two curves (error area)

Dopo aver trovato l'errore per le singole curve(arch), queste vengono raggruppate per posizione (1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, ecc.) per calcolare l'errore medio di ciascun gruppo. Questo perché il carattere della curva(arch) differisce a seconda della posizione. Controllando le medie degli errori di gruppo e complessivi, si può effettuare una valutazione primaria dell'affidabilità del metodo di ricostruzione.

Successivamente, viene controllata la deviazione standard, poiché il solo valore medio non rivela la distribuzione dei dati. Ad esempio, i due insiemi [-5, -3, 3, 5] e [-1, 0, 0, 1] hanno entrambi una media di 0, ma i dati del primo insieme sono molto più dispersi rispetto alla media rispetto al secondo. La deviazione standard è una misura di quanto i dati sono sparsi attorno alla media. Una deviazione standard più piccola significa che i dati sono raggruppati attorno al valore medio. Pertanto, controllando anche la deviazione standard, l'affidabilità del

metodo di ricostruzione può essere valutata più a fondo. (※ Viene utilizzata la deviazione standard campionaria, con la deviazione standard della popolazione indicata anche tra parentesi.)

La Tabella 11 mostra l'errore per unità di lunghezza e la deviazione standard, mentre la Tabella 12 organizza i dati originali (Raw Data) per ciascuna coppia di curve(arch) per gruppo. La caratteristica più evidente qui è che la 1<sup>a</sup> curva(arch) ha l'errore più piccolo. Escludendo la 6<sup>a</sup> curva(arch), l'errore aumenta nell'ordine di 1<sup>a</sup><2<sup>a</sup><4<sup>a</sup><3<sup>a</sup><5<sup>a</sup> curva(arch). La deviazione standard mostra una tendenza simile, indicando che la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> curva(arch) hanno la minor variazione.

Confrontando la tavola e il fondo, l'errore per il fondo è complessivamente più piccolo. Ciò sembra dovuto al fatto che il fondo ha meno deformazioni rispetto alla tavola. Nel frattempo, nonostante il complesso metodo di ricostruzione per la 6<sup>a</sup> curva(arch), il suo errore è stato sorprendentemente più piccolo di quello delle altre curve(arch). La media complessiva dell'errore è inferiore a 0.2, e la 6<sup>a</sup> curva(arch), in particolare, ha mostrato un risultato soddisfacente di 0.161. Anche la deviazione standard è piccola, inferiore a 0.1, indicando che i risultati della ricostruzione sono relativamente uniformi.

Considerando la superficie irregolare dei modelli originali, la deformazione della tavola e le tolleranze computazionali, questo livello di media dell'errore e di deviazione standard dimostra che questo metodo di ricostruzione ha un grado di affidabilità sufficientemente elevato.

Group	Arch	Error per unit length [mm <sup>2</sup> /mm]					Std. Dev. SD (PSD)		
		Min	Max	Avg					
1	Front-1st	0.044	0.261	0.147	0.141	0.184	0.083	0.066	0.102 (0.101)
2	Back-1st	0.043	0.177	0.134			0.050		
3	Front-2nd	0.089	0.391	0.199	0.183	0.180	0.111	0.096	0.097 (0.096)
4	Back-2nd	0.043	0.293	0.167			0.082		
5	Front-3rd	0.107	0.325	0.213	0.201	0.194	0.083	0.094	
6	Back-3rd	0.062	0.385	0.190			0.108		
7	Front-4th	0.086	0.326	0.181	0.194	0.203	0.098	0.122	
8	Back-4th	0.062	0.429	0.207			0.148		
9	Front-5th	0.088	0.495	0.206	0.203	0.154	0.122	0.121	0.065 (0.063)
10	Back-5th	0.055	0.379	0.199			0.129		
11	Front-6th-U	0.111	0.159	0.127	0.154	0.161	0.021	0.052	
12	Back-6th-U	0.104	0.257	0.181			0.063		
13	Front-6th-L	0.084	0.296	0.178	0.168		0.093	0.079	
14	Back-6th-L	0.060	0.236	0.157			0.074		

Table 11: Error data per unit length by group

Group	Arch	Error Area [mm <sup>2</sup> ]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm <sup>2</sup> /m]	Group	Arch	Error Area [mm <sup>2</sup> ]	Original Arch Length [mm]	Error per unit length [mm <sup>2</sup> /m]
1	A-F-1-B	10.226	76.149	0.134	7	A-F-4-B	7.460	79.890	0.093
	A-F-1-S	11.505	75.283	0.153		A-F-4-S	6.994	81.163	0.086
	B-F-1-B	3.812	86.202	0.044		B-F-4-B	23.782	95.154	0.250
	B-F-1-S	3.973	86.723	0.046		B-F-4-S	24.189	95.354	0.254
	C-F-1-B	28.723	160.600	0.179		C-F-4-B	14.760	170.583	0.087
	C-F-1-S	40.152	158.215	0.254		C-F-4-S	17.417	170.388	0.102
	D-F-1-B	19.892	76.275	0.261		D-F-4-B	20.146	81.371	0.248
	D-F-1-S	8.581	78.424	0.109		D-F-4-S	27.047	83.068	0.326
2	A-B-1-B	11.821	76.272	0.155	8	A-B-4-B	10.492	77.900	0.135
	A-B-1-S	11.069	76.988	0.144		A-B-4-S	8.251	77.976	0.106
	B-B-1-B	14.352	86.266	0.166		B-B-4-B	5.905	95.017	0.062
	B-B-1-S	15.008	85.928	0.175		B-B-4-S	7.156	94.863	0.075
	C-B-1-B	27.631	156.323	0.177		C-B-4-B	70.837	166.484	0.425
	C-B-1-S	22.145	155.892	0.142		C-B-4-S	71.665	167.218	0.429
	D-B-1-B	5.033	74.509	0.068		D-B-4-B	13.998	81.420	0.172
	D-B-1-S	3.327	76.730	0.043		D-B-4-S	20.894	82.923	0.252
3	A-F-2-B	6.084	68.299	0.089	9	A-F-5-B	18.311	94.900	0.193
	A-F-2-S	7.458	67.836	0.110		A-F-5-S	16.584	96.689	0.172
	B-F-2-B	26.978	78.806	0.342		B-F-5-B	21.105	112.430	0.188
	B-F-2-S	30.649	78.291	0.391		B-F-5-S	18.924	112.799	0.168
	C-F-2-B	15.051	134.954	0.112		C-F-5-B	18.517	209.786	0.088
	C-F-2-S	21.449	135.660	0.158		C-F-5-S	30.302	206.642	0.147
	D-F-2-B	13.124	66.496	0.197		D-F-5-B	47.980	96.976	0.495
	D-F-2-S	12.714	67.096	0.189		D-F-5-S	19.133	95.194	0.201
4	A-B-2-B	7.055	68.277	0.103	10	A-B-5-B	6.117	94.354	0.065
	A-B-2-S	10.504	68.531	0.153		A-B-5-S	7.377	94.640	0.078
	B-B-2-B	14.923	78.396	0.190		B-B-5-B	37.108	112.574	0.330
	B-B-2-S	16.478	77.747	0.212		B-B-5-S	35.063	111.712	0.314
	C-B-2-B	33.017	137.652	0.240		C-B-5-B	36.802	203.237	0.181
	C-B-2-S	41.008	140.188	0.293		C-B-5-S	38.955	204.817	0.190
	D-B-2-B	6.784	64.402	0.105		D-B-5-B	5.144	94.144	0.055
	D-B-2-S	2.874	66.540	0.043		D-B-5-S	36.946	97.361	0.379
5	A-F-3-B	11.216	52.666	0.213	11	A-F-6-U	27.506	173.469	0.159
	A-F-3-S	12.161	52.520	0.232		B-F-6-U	23.877	199.364	0.120
	B-F-3-B	14.061	62.691	0.224		C-F-6-U	45.537	378.590	0.120
	B-F-3-S	10.806	63.564	0.170		D-F-6-U	21.605	194.149	0.111
	C-F-3-B	35.778	110.249	0.325	12	A-B-6-U	32.973	169.548	0.194
	C-F-3-S	35.522	110.583	0.321		B-B-6-U	36.110	214.484	0.168
	D-F-3-B	5.465	51.155	0.107		C-B-6-U	92.649	360.992	0.257
	D-F-3-S	5.879	51.870	0.113		D-B-6-U	20.094	193.230	0.104
6	A-B-3-B	8.207	49.235	0.167	13	A-F-6-L	21.401	168.116	0.127
	A-B-3-S	7.904	49.584	0.159		B-F-6-L	40.678	197.677	0.206
	B-B-3-B	3.866	62.371	0.062		C-F-6-L	106.601	360.537	0.296
	B-B-3-S	4.458	62.167	0.072		D-F-6-L	12.551	148.740	0.084
	C-B-3-B	30.750	108.894	0.282	14	A-B-6-L	24.118	165.571	0.146
	C-B-3-S	42.876	111.394	0.385		B-B-6-L	33.268	179.422	0.185
	D-B-3-B	7.628	49.617	0.154		C-B-6-L	86.874	368.659	0.236
	D-B-3-S	12.091	50.768	0.238		D-B-6-L	9.020	149.513	0.060

**Table 12:** Raw data of error per unit length by group. Abbreviation: Model (A/B/C/D) - Plate(Front/Back) - Arch N.(1/2/3/4/5/6) - Side(Bass bar/Sound post or Upper/Lower))

## 9 Applicazione nella Liuteria

Finora, questo rapporto ha esaminato il processo di ricreazione delle curve(arch) di quattro modelli. L'obiettivo finale di questa ricerca è trovare un metodo per applicare la bombatura di Stradivari a strumenti di dimensioni diverse dai modelli utilizzati nello studio. Pertanto, questo capitolo esplorerà come applicare questo metodo quando la larghezza e l'altezza della curva(arch) sono diverse. Come in precedenza, questo rapporto discuterà separatamente le curve(arch) n. 1-5 e la curva(arch) n. 6.

### 9.1 Curve(arch) N. 1-5

I parametri necessari per creare una curva(arch) sono la sua larghezza, altezza e la posizione del punto di controllo della pienezza. La larghezza è determinata dal liutaio in base alle dimensioni della tavola e alla larghezza del bordo. L'altezza è determinata automaticamente una volta creata la 6<sup>a</sup> curva(arch). Pertanto, la curva(arch) può essere creata se è nota solo la posizione del punto di controllo della pienezza.

Poiché l'obiettivo è ricostruire la forma della curva(arch) di Stradivari, è necessario un «modello standard» come riferimento. Questo modello standard serve come scala per calcolare la posizione del punto di controllo della pienezza per un nuovo strumento. Cioè, la distanza relativa dall'estremo della curva(arch) viene applicata in modo proporzionale.

Ad esempio, supponiamo di aver scelto il lato sinistro della tavola della 1<sup>a</sup> curva(arch) del Modello A come modello standard per la 1<sup>a</sup> curva(arch). In questo modello standard, il punto di controllo della pienezza si trova a 25.91 in orizzontale (asse x) e 3.9 in verticale (asse y) dall'estremo della curva(arch). Se stiamo realizzando una nuova curva(arch) che è 1.1 volte la larghezza e 0.9 volte l'altezza del modello standard, la posizione del punto di controllo della pienezza viene calcolata come segue:

Posizione orizzontale:  $25.91 \times 1.1 = 28.50$ , Posizione verticale:  $3.9 \times 0.9 = 3.51$

Dobbiamo quindi creare una curva trocoide che passi per questa posizione calcolata. In pratica, si può pre-calcolare il «rapporto di posizione» del punto di controllo della pienezza rispetto alla larghezza e all'altezza del modello standard, e poi moltiplicare questo rapporto per la larghezza e l'altezza del nuovo strumento. Ad esempio, supponiamo che il rapporto di posizione del punto di controllo della pienezza del modello standard sia il seguente:

$$\begin{aligned}\text{Rapporto di Posizione in direzione asse x (Rate\_Zx)} &= \frac{(\text{distanza asse x da estremo curva(arch) a punto controllo pienezza})}{(\text{metà larghezza curva(arch)})} \\ &= \frac{25.91}{75.53} \\ &= 0.3430\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Rapporto di Posizione in direzione asse y (Rate\_Zy)} &= \frac{(\text{distanza asse y da estremo curva(arch) a punto controllo pienezza})}{(\text{altezza curva(arch)})} \\ &= \frac{7.2 - 3.3}{12.0 - 3.3} = \frac{3.9}{8.7} \\ &= 0.3793\end{aligned}$$

Usando questo rapporto, la posizione del punto di controllo della pienezza per la curva(arch) da creare (larghezza 81.0mm, altezza 7.8mm) può essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned}\text{distanza asse x da estremo curva(arch) a punto controllo pienezza} &= \text{Larghezza Curva(arch)} \times \text{Rate\_Zx} \\ &= 81.0 \times 0.3430 \\ &= 27.783\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{distanza asse y da estremo curva(arch) a punto controllo pienezza} &= \text{Altezza Curva(arch)} \times \text{Rate\_Zy} \\ &= 7.8 \times 0.3793 \\ &= 2.9585\end{aligned}$$

Pertanto, conoscendo il rapporto di posizione del punto di controllo della pienezza per ogni curva(arch), si può creare una curva(arch) con lo stesso rapporto di pienezza del modello standard, anche se la larghezza e l'altezza dello strumento sono diverse.

## 9.2 La 6<sup>a</sup> Curva(arch)

Poiché la 6<sup>a</sup> curva(arch) ha punti di controllo della forma aggiuntivi, sono necessarie anche informazioni che determinano la «forma» stessa della curva(arch). Per le curve(arch) n. 1-5, esiste una sola curva trocoide che passa per i tre punti (apice, estremo, punto di controllo della pienezza). Tuttavia, per la 6<sup>a</sup> curva(arch), ci sono infinite curve che possono passare per questi tre punti, quindi sono necessarie le seguenti variabili aggiuntive per specificare la forma:

- Ampiezza della curva polinomiale cubica: Proporzionale all'altezza della curva(arch). Similmente al punto

di controllo della pienezza, viene calcolato e applicato il «rapporto» tra l'ampiezza e l'altezza della curva(arch) del modello standard.

- Direzione del manico e valore dell'esponente: Si tratta di valori intrinseci che determinano la forma indipendentemente dalla larghezza o altezza della curva(arch), quindi vengono utilizzati direttamente i valori del modello standard.

Ad esempio, il rapporto di ampiezza della curva polinomiale cubica per il modello standard (Modello A, Tavola, 6<sup>a</sup> curva(arch) parte superiore, altezza 15.1, ampiezza -9.1) è il seguente:

$$\begin{aligned}\text{Rapporto Ampiezza Curva Polinomiale Cubica (Rate_bamp)} &= \frac{(\text{Ampiezza curva polinomiale cubica})}{(\text{Altezza curva(arch)})} \\ &= \frac{-7.313}{(15.5 - 3.3)} \\ &= -0.5946\end{aligned}$$

Se l'altezza della nuova curva(arch) è 11.9, l'ampiezza della curva polinomiale cubica da utilizzare è la seguente:

$$\begin{aligned}\text{Ampiezza Curva Polinomiale Cubica} &= (\text{Altezza curva(arch)}) \times (\text{Rate_bamp}) \\ &= 11.9 \times (-0.5946) = -7.0757\end{aligned}$$

(※ L'ampiezza della curva polinomiale cubica è sempre negativa, e il segno meno (-) davanti al numero indica la direzione del manico.)

In conclusione, conoscendo l'ampiezza e la direzione del manico (-7.0757), il valore dell'esponente (-0.613), e la posizione del punto di controllo della pienezza (metodo di calcolo uguale a quello per le curve(arch) n. 1-5) della curva polinomiale cubica del modello standard, si può creare una curva(arch) con lo stesso rapporto di pienezza e forma del modello standard, anche se la larghezza e l'altezza della curva(arch) cambiano.

## 10 Conclusioni e Discussione

Le curve(arch) di Stradivari presentano vari gradi di «Pienezza (Fullness)» a seconda della posizione. Questo studio ha rivelato che la 2<sup>a</sup> curva(arch) e la 4<sup>a</sup> curva(arch) hanno una Pienezza bassa, mentre la 5<sup>a</sup> curva(arch) è caratterizzata da una Pienezza alta, e la 6<sup>a</sup> curva(arch) da una Pienezza molto alta. Per realizzare tali diverse Pienezze, è necessario poterle controllare mantenendo al contempo la larghezza e l' altezza della curva(arch).

La curva Trocoide Accorciata (Curtate Trochoid), precedentemente considerata un modello di riferimento, non può essere utilizzata per le curve(arch) di Stradivari poiché la sua Pienezza non è regolabile. Tuttavia, ho confermato che le curve Ipotrocoide Accorciata (Curtate Hypotrochoid) ed Epitrocoide Accorciata (Curtate Epitrochoid) — generate da un cerchio che rotola all' interno o all' esterno di un altro cerchio — permettono di regolare la Pienezza e possono essere usate per riprodurre le curve(arch) di Stradivari.

Ciononostante, anche queste due curve presentano dei limiti nella regolazione della Pienezza. Nei casi che vanno oltre tali limiti, le curve(arch) possono essere riprodotte usando una Curva di Approssimazione creata da una curva di Trasformazione. A tale scopo, questo studio ha utilizzato come curva di trasformazione una curva catenaria distorta esponenzialmente. La curva di approssimazione si ottiene deformando una curva trocoidale in base ai valori delle coordinate di questa curva di trasformazione. Questo studio ha riprodotto la 6<sup>a</sup> curva(arch), dalla forma unica, deformando una Trocoide Accorciata, utilizzando come curve di trasformazione una curva polinomiale cubica distorta esponenzialmente e una curva catenaria.

Attraverso l'analisi delle loro immagini, dei parametri, della Pienezza e dei margini di errore, ho confermato che le curve(arch) riprodotte con questi metodi sono estremamente simili a quelle originali.

Per confrontare la Pienezza di curve(arch) con larghezze e altezze diverse in modo più oggettivo e quantitativo, ho introdotto nuove metriche: l'Indice di Pienezza Assoluta (Absolute Fullness Index) e l'«Indice di Pienezza Relativa (Relative Fullness Index). Questi indici mi hanno permesso di quantificare le caratteristiche di Pienezza delle curve(arch) riprodotte, e si può affermare che i risultati rappresentano le proprietà uniche delle curve(arch) originali di Stradivari.

L' errore medio per unità di lunghezza per tutte le curve(arch) riprodotte è stato di circa 0.180 (mm<sup>2</sup>/mm), con una deviazione standard campionaria di 0.097. Considerando le superfici irregolari e le deformazioni delle curve(arch) originali, ciò suggerisce che questo metodo di riproduzione possiede un altissimo grado di accuratezza e affidabilità. Prevedo che l' errore sarebbe significativamente inferiore se l' obiettivo fosse una curva media liscia e simmetrica, priva di deformazioni.

Per applicare questo metodo di riproduzione alla liuteria effettiva, è necessario un modello standard che serva da riferimento. I liutai possono utilizzare le posizioni proporzionali dei punti di controllo della Pienezza e i rapporti dei parametri delle curve modello di questo standard per creare curve(arch) con una Pienezza proporzionalmente

identica su strumenti di qualsiasi dimensione desiderata. Pertanto, assicurarsi un modello standard ideale con deformazioni minime, dal quale sia possibile estrarre dati sufficienti, è di fondamentale importanza per il successo dell'applicazione di questo metodo.

Questo studio presenta alcune limitazioni. In primo luogo, il numero di campioni è esiguo. Si tratta di un problema significativo che potrebbe influenzare non solo l'affidabilità del processo di riproduzione, ma anche la determinazione della larghezza del bordo, che sarà discussa in appendice. In secondo luogo, il metodo di riproduzione per la 6<sup>a</sup> Curva(arch) è piuttosto complesso e poco intuitivo. Saranno necessarie ricerche future per trovare un metodo più conciso e intuitivo. In terzo luogo, questo metodo è difficile da implementare usando solo semplici attrezzi manuali. Tuttavia, prevedo che questo problema sarà risolto da un'applicazione software dedicata che verrà distribuita in futuro.

Non possiamo sapere quali fossero le esatte intenzioni o i metodi che Stradivari usò per creare queste bombature a Cremona 300 anni fa. Tuttavia, questo studio dimostra chiaramente che, utilizzando curve Ipotrocoide Accorciata, Epitrocoide Accorciata e di approssimazione, è possibile ricostruire curve(arch) straordinariamente simili alla sua opera.

Il fatto che la bombatura di Stradivari—realizzata unicamente con l'esperienza in un'epoca senza computer—coincida quasi perfettamente con i moderni calcoli matematici, è stato per me un profondo shock. Spero che, attraverso questo studio, questo splendido dono, la bombatura di Stradivari, possa essere trasmesso a molte più persone.

## 11 Appendice

### 11.1 Analisi del Modello di Bombatura

(※ Si prega di notare che il contenuto di questa sezione potrebbe essere impreciso a causa del numero ridotto di campioni e dell'inclusione della speculazione dell'autore.)

Una volta definita la curva(arch) da ricostruire, la sua forma deve essere analizzata per una ricostruzione più approfondita. Questa analisi comporta la comprensione del modello dei dati delle linee di contorno. A tal fine, questo capitolo introduce un nuovo strumento chiamato «Mappa di Contorno (Contour map)». Attraverso l'analisi della mappa di contorno, le caratteristiche della bombatura di Stradivari possono essere comprese in modo più dettagliato, il che sarà di grande aiuto nella progettazione di bombature per la liuteria pratica.

L'obiettivo finale di questa ricerca non è semplicemente replicare le curve(arch) di Stradivari esistenti così come sono oggi. È ricostruire il loro aspetto prima che si deformassero, cioè il loro stato iniziale al momento della costruzione. Questo è in definitiva un processo di comprensione delle intenzioni progettuali di Stradivari, e richiede speculazione logica e immaginazione. Questo capitolo presenta diversi metodi per aiutare in tale processo di ragionamento.

Ci sono due punti principali da considerare nella ricostruzione della curva(arch). Il primo è con quanta fedeltà viene ricostruita ogni singola curva(arch), e il secondo è quanto bene vengono riflesse le relazioni tra le curve(arch). La curva(arch) ricostruita avrà inevitabilmente lievi differenze rispetto all'originale. Questa differenza potrebbe non essere evidente guardando una singola curva(arch) da sola, ma può diventare più distinta nel contesto della sua relazione con altre curve(arch). Pertanto, una corretta ricostruzione deve riprodurre fedelmente le interrelazioni tra le curve(arch).

Il modo più comune per comprendere le interrelazioni tra le curve(arch) è controllare le linee di contorno complessive. Tuttavia, questo può essere difficile da disegnare e inefficiente per confrontare le relazioni. Per superare queste carenze, è stato introdotto un nuovo strumento di analisi chiamato «Mappa di Contorno». La mappa di contorno consiste in uno scheletro semplificato delle linee di contorno complessive e in un diagramma in cui queste sono allineate in fila.

La Figura 70 «Mappa di Contorno-A» mostra lo scheletro delle linee di contorno complessive.

- Composizione: Il lato sinistro rappresenta la tavola e il lato destro il fondo. I punti rossi indicano gli estremi e l'apice della curva(arch), mentre i punti neri indicano le posizioni delle linee di contorno.
- Linee di collegamento centrali: Collegando con linee rette i punti di contorno dello stesso numero sulla tavola e sul fondo, la differenza di forma della 6<sup>a</sup> curva(arch) può essere confrontata a colpo d'occhio. (I punti di contorno di altezze diverse sono collegati da linee tratteggiate, mentre i bordi della tavola della

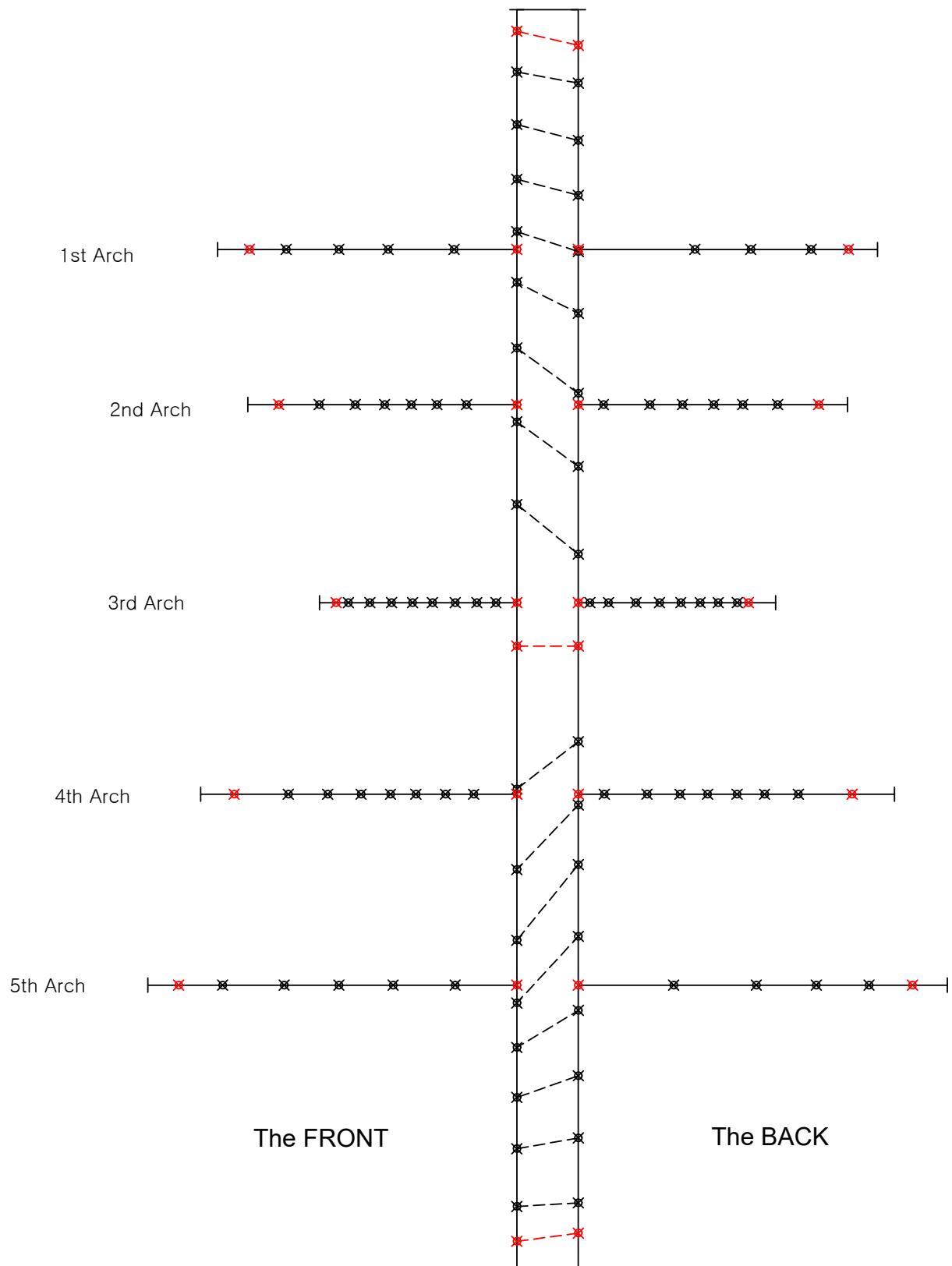


Figure 70: Contour map(A) of the Model A

stessa altezza sono collegati da linee continue.)

- Utilizzo: La pendenza della curva(arch) può essere determinata dalla spaziatura dei punti. È anche utile per identificare rapidamente le differenze e le caratteristiche delle 6<sup>a</sup> curve(arch) della tavola e del fondo attraverso il modello delle linee di collegamento (pendenza, direzione, ecc.).

Analizzando la 6<sup>a</sup> curva(arch) attraverso la Mappa di Contorno-A, la parte centrale della tavola è piatta e la pendenza diventa più ripida verso le estremità, mentre il fondo forma una curva dolce nel complesso. D'altra parte, si osservano alcune parti sospette di errore di misurazione, come la larghezza del bordo insolitamente stretta della parte superiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) sulla tavola. In una curva(arch) ideale, la pendenza delle linee di collegamento centrali dovrebbe cambiare gradualmente, ma nella parte inferiore della 6<sup>a</sup> curva(arch), c'è una sezione in cui la pendenza cambia in modo alquanto irregolare, suggerendo che la curva(arch) non è liscia.

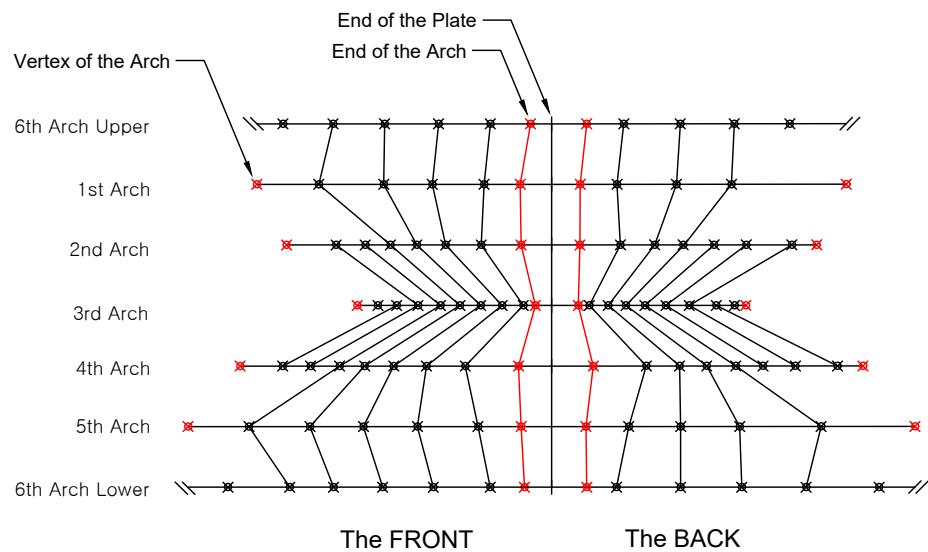


Figure 71: Contour map(B) of the Model A

La Figura 71 «Mappa di Contorno-B» è un diagramma in cui gli scheletri di contorno delle sei curve(arch) sono allineati fianco a fianco in base all'«estremità della tavola».

- Composizione: Il lato sinistro è la tavola e il lato destro è il fondo. A differenza della Mappa-A, i punti di contorno della stessa altezza all'interno della stessa tavola sono collegati da linee continue.
- Utilizzo: È utile per confrontare i modelli delle curve(arch) n. 1-5 tra loro, e specialmente per comprendere la relazione tra la 6<sup>a</sup> curva(arch) e la 1<sup>a</sup> (parte superiore) e la 5<sup>a</sup> (parte inferiore) curva(arch). Attraverso ciò, si possono vedere chiaramente anche le differenze di modello tra la tavola e il fondo.

Analizzando la Mappa di Contorno-B, la 1<sup>a</sup> curva(arch) della tavola ha un totale di quattro punti di contorno, mentre il fondo ne ha solo tre. Anche la 5<sup>a</sup> curva(arch) sul fondo ne ha uno in meno. Ciò significa che l'altezza della curva(arch) del fondo è diminuita più rapidamente di quella della tavola. Osservando la relazione tra la 6<sup>a</sup> curva(arch) superiore e la 1<sup>a</sup>, e tra la 6<sup>a</sup> curva(arch) inferiore e la 5<sup>a</sup>, la 6<sup>a</sup> curva(arch) è generalmente più ripida

della 1<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch) per la tavola. Al contrario, per il fondo, sono simili, o la 6<sup>a</sup> è molto leggermente più dolce della 1<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup>.

Una parte particolarmente degna di nota di questo diagramma è la posizione degli estremi della curva(arch), indicata da linee rosse continue. Poiché gli estremi della curva(arch) determinano la lunghezza della curva(arch), è molto importante identificare accuratamente le loro posizioni.

L'irregolarità nelle posizioni degli estremi della curva(arch) mostrata sulla mappa potrebbe essere dovuta a errori nel processo di estrazione dei dati o a errori di misurazione nel materiale di origine stesso. Questo perché il confine delle estremità della curva(arch) non è distinto negli strumenti fatti a mano, rendendo difficile una misurazione precisa.

La pendenza irregolare delle linee di collegamento nella parte inferiore del fondo è un segno che i punti di misurazione sono imprecisi o la curva non è liscia. Inoltre, la larghezza del bordo della 3<sup>a</sup> curva(arch) sul fondo è insolitamente ampia, il che significa che la pienezza della 3<sup>a</sup> curva(arch) è anormalmente piccola. Questa sembra essere una caratteristica unica di quello strumento.

Infine, le larghezze dei bordi dei Modelli A, B e C variano a seconda della posizione. Mentre molti liutai moderni realizzano i lobi superiore e inferiore della stessa larghezza e la C più stretta, il materiale di origine mostra che non era così.

Sebbene le esatte intenzioni progettuali di Stradivari siano sconosciute, si possono dedurre le seguenti regole dai Modelli A, B e C.

*La*: distanza dall'estremità della tavola all'estremo della curva(arch)

*Lc*: distanza dall'estremità della tavola al primo punto di contorno

- Regola 1. (Tavola/Fondo) Per le curve(arch) n. 1-5, la grandezza di *Lc* è nell'ordine di  $3^a < 1^a < 5^a < 2^a < 4^a$ .
- Regola 2. (Tavola) La pendenza della parte superiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) è più ripida di quella della 1<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 3. (Tavola) La pendenza della parte inferiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) è più ripida di quella della 5<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 4. (Tavola) *La* e *Lc* della 6<sup>a</sup> curva(arch) sono più strette di quelle della 1<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 5. (Fondo) La pendenza della parte superiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) è più dolce o simile a quella della 1<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 6. (Fondo) La pendenza della parte inferiore della 6<sup>a</sup> curva(arch) è più dolce o simile a quella della 5<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 7. (Fondo) *La* e *Lc* della 6<sup>a</sup> curva(arch) sono più larghe di quelle della 1<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> curva(arch).
- Regola 8. (Tavola/Fondo) Complessivamente, *La* e *Lc* sono più larghe sul fondo che sulla tavola.

Sintetizzando le regole di cui sopra, l'ordine di La (larghezza del bordo) per l'intera tavola può essere dedotto come segue.

- Regola 9. (Tavola) La grandezza di *La* è nell'ordine di  $3^a < 6^a$ (superiore)  $< 6^a$ (inferiore)  $< 1^a < 5^a < 2^a < 4^a$ .

Per il fondo, è difficile essere certi a causa della mancanza di campioni, ma sulla base delle regole di cui sopra, si può ipotizzare quanto segue.

- Regola 10. (Fondo) La grandezza di *La* è nell'ordine di  $3^a < 1^a < 6^a$ (superiore)  $< 5^a < 2^a < 6^a$ (inferiore)  $< 4^a$ .

Infine, riassumendo le Regole 9 e 10 in una tabella si ottiene la Tabella 13.

Arch	the FRONT	the BACK
6th Arch-Upper	2	3
1st Arch	4	2
2nd Arch	6	5
3rd Arch	1	1
4th Arch	7	7
5th Arch	5	4
6th Arch-Lower	3	6

**Table 13:** Order of Edge Width

Fare riferimento a questo ordine di larghezze dei bordi sarà utile per ricreare la bombatura di Stradivari in modo più fedele.

## 11.2 Ipotesi sulla bombatura Originale del Modello A

Le curve(arch) ricostruite in questo rapporto si basano sul loro stato attuale e deformato dopo molti anni. Tuttavia, ciò che desideriamo veramente sapere è la forma originale di 300 anni fa, prima che si verificasse qualsiasi deformazione, come inteso dal costruttore.

In questo capitolo, si tenta di ricostruire l'aspetto al momento della costruzione correggendo queste deformazioni e modificando le posizioni discutibili degli estremi della curva(arch) attraverso un ragionamento logico. Per fare ciò, si sono prima ridotte le deformazioni e gli errori di misurazione utilizzando la media dei dati dei lati sinistro e destro della tavola, e poi si sono corrette le larghezze dei bordi secondo il metodo descritto in precedenza.

(※ Anche se i dati del Modello A provenissero dal «Messia», sarebbe errato confrontare questi risultati di ricostruzione con i dati effettivi del Messia. Questo perché i risultati attuali sono stime basate su dati di curve irregolari. Infatti, le altezze di alcune curve(arch) presentano errori fino a 0.5(mm) rispetto ai dati di origine.)

I risultati della ricostruzione sono allegati in formati di file PDF e DXF, e le descrizioni per ogni file allegato sono le seguenti.

- Front/Back\_All\_Arches.pdf: Tutte le curve(arch) e dati correlati (bamp: ampiezza e direzione manico curva polinomiale cubica, camp: ampiezza curva catenaria, pamp: ampiezza Curva di Trasformazione finale, expo: valore esponente, tc: tolleranza)
- Front/Back\_All\_Arches\_Plate.pdf: Tutte le curve(arch) inclusa la tavola e dati correlati
- Front/Back\_Contour\_Map.pdf: Mappa di contorno
- Contour\_Map\_Comparison\_A/B.pdf: Confronto tra le mappe di contorno della Tavola e del Fondo
- Front/Back\_All\_Arches.dxf: Tutte le curve(arch) (file CAD universale per l'output)

(※ I file allegati sopra sono stati creati con «Violin Arch Designer - ver. 1.0.0», un programma sviluppato dall'autore.)

### 11.3 Abbreviazioni e Zone di Pienezza

Notazione	Descrizione
<b>TD</b>	(Trochoid) Termine generale per le curve Trocoidi
<b>CTD</b>	(Curtate Trochoid) Una curva Trocoide Accorciata con un motivo che si ripete continuamente
<b>CHT</b>	(Curtate Hypotrochoid) Una curva Ipotrocoide Accorciata con un motivo che si ripete continuamente
<b>CET</b>	(Curtate Epitrochoid) Una curva Epitrocoide Accorciata con un motivo che si ripete continuamente
<b>CTDA</b>	(Curtate Trochoid Arch) Una curva(arch) estratta da una CTD
<b>CHTA</b>	(Curtate Hypotrochoid Arch) Una curva(arch) estratta da una CHT. (Pienezza maggiore di un CTDA.)
<b>CETA</b>	(Curtate Epitrochoid Arch) Una curva(arch) estratta da una CET. (Pienezza minore di un CTDA.)
<b>nCHTA</b>	(near.CHTA) Un CHTA vicino al CHTA target. (Pienezza maggiore di un CTDA.)
<b>nCETA</b>	(near.CETA) Un CETA vicino al CETA target. (Pienezza minore di un CTDA.)
<b>maxCHTA</b>	(maximum.CHTA) Il CHTA con la massima pienezza possibile per una data larghezza e altezza della curva(arch).
<b>minCETA</b>	(minimum.CETA) Il CETA con la minima pienezza possibile per una data larghezza e altezza della curva(arch).
<b>nCHTAce</b>	(near.CHTA.catenary.exponential) Una curva(arch) approssimata creata trasformando un CHTA vicino usando una curva catenaria e una funzione esponenziale, usata quando il CHTA target non può essere creato con metodi normali. (Pienezza maggiore di un CTDA.)
<b>nCETAice</b>	(near.CETA.inverted catenary.exponential) Una curva(arch) approssimata creata trasformando un CETA vicino usando una curva catenaria invertita e una funzione esponenziale, usata quando il CETA target non può essere creato con metodi normali. (Pienezza minore di un CTDA.)
<b>CTDAce</b>	(CTDA.catenary.exponential) Una curva(arch) approssimata creata trasformando un CTDA usando una curva catenaria e una funzione esponenziale, usata quando il CHTA o CETA target non può essere creato con metodi normali. (Pienezza maggiore di un CTDA.)
<b>CTDAice</b>	(CTDA.inverted catenary.exponential) Una curva(arch) approssimata creata trasformando un CTDA usando una curva catenaria invertita e una funzione esponenziale, usata quando il CHTA o CETA target non può essere creato con metodi normali. (Pienezza minore di un CTDA.)
<b>CTDAcec</b>	(CTDA.cubic polynomial.exponential.catenary) Una curva(arch) creata trasformando un CTDA usando una curva catenaria, una funzione polinomiale cubica e una funzione esponenziale. (Usata solo per la 6 <sup>a</sup> curva(arch), non è una curva di approssimazione.)

Table 14: Abbreviazioni

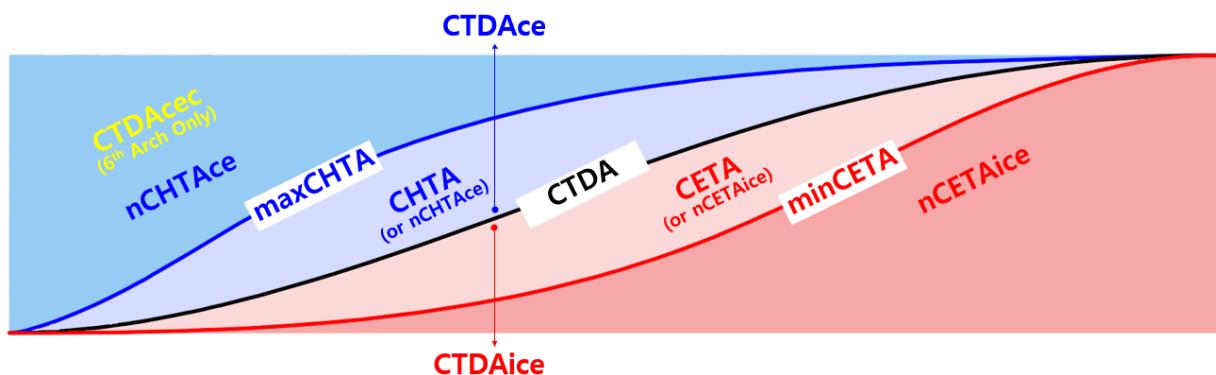


Figure 72: Fullness Zones by Type of Curve

## Riferimenti

- [1] S. F. Sacconi, *I 'segreti' di Stradivari*. Cremona: Libreria del Convegno, 1972, pp. 63–83.
- [2] The Strad, *Antonio Stradivari 'Titian' Violin, 1715*, Poster, London, UK, n.d.
- [3] R. M. Mottola, “Comparison of Arching Profiles of Golden Age Cremonese Violins and Some Mathematically Generated Curves,” *Savart Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 172–191, 2011.

## Siti Web

- H.I.S. Violin Atelier (Programma per la creazione di archi) – <https://www.hisviolins.com>